



JAMES STEWART | LOTHAR REDLIN | SALEEM WATSON

# PRECÁLCULO | 6<sup>e</sup>

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO



© 2010 Monkey Business Images 2010.  
Utilizado bajo licencia de Shutterstock.com

## FUNDAMENTOS

- 1.1** Números reales
- 1.2** Exponentes y radicales
- 1.3** Expresiones algebraicas
- 1.4** Expresiones racionales
- 1.5** Ecuaciones
- 1.6** Modelado con ecuaciones
- 1.7** Desigualdades
- 1.8** Geometría de coordenadas
- 1.9** Calculadoras graficadoras; resolución gráfica de ecuaciones y desigualdades
- 1.10** Rectas
- 1.11** Modelos con el uso de variaciones

### ENFOQUE SOBRE MODELADO

Ajuste lineal de datos

En este primer capítulo repasamos los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

Veamos la forma en que todas estas ideas se usan en una situación real: suponga que a usted le pagan \$9 por hora en su trabajo de tiempo parcial. Podemos *modelar* su paga y por trabajar  $x$  horas mediante la ecuación  $y = 9x$ . Para averiguar cuántas horas necesita trabajar para que le paguen 200 dólares, resolvemos la ecuación  $200 = 9x$ . Graficar la ecuación  $y = 9x$  en un *plano coordenado* nos ayuda a “ver” cómo aumenta la paga con las horas trabajadas.

## 1.1 NÚMEROS REALES

Propiedades de los números reales ► Adición y sustracción ► Multiplicación y división ► La recta de números reales ► Conjuntos e intervalos ► Valor absoluto y distancia

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales**:

1, 2, 3, 4, ...

Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como “medio galón de leche,” y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Construimos los **números racionales** al tomar razones de enteros. Entonces, cualquier número racional  $r$  puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde  $m$  y  $n$  son enteros y  $n \neq 0$ . Como ejemplos, tenemos

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{7}, \quad 46 = \frac{46}{1}, \quad 0.17 = \frac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como  $\frac{3}{0}$  y  $\frac{0}{0}$  no están definidas.) También hay números reales, tales como  $\sqrt{2}$ , que no se pueden expresar como una razón entre enteros y por tanto se denominan **números irracionales**. Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt[3]{2}, \quad \pi, \quad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo  $\mathbb{R}$ . Cuando usamos la palabra *número* sin más detalle, queremos decir “número real”. La Figura 1 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

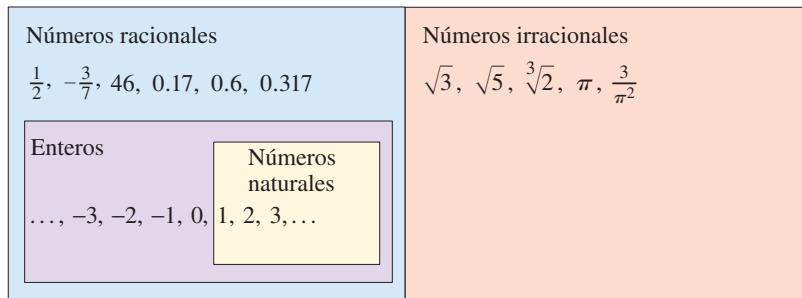


FIGURA 1 El sistema de números reales

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\dots$$

es un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\dots \\ 10x &= 35.47474747\dots \\ 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por tanto,  $x = \frac{3512}{990}$ . La idea es multiplicar  $x$  por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} = 0.5000\dots = 0.\bar{5} & \frac{2}{3} = 0.66666\dots = 0.\bar{6} \\ \frac{157}{495} = 0.3171717\dots = 0.3\bar{17} & \frac{9}{7} = 1.285714285714\dots = 1.\bar{285714} \end{array}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots \quad \pi = 3.141592653589793\dots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo  $\approx$  se lee “es aproximadamente igual a”. Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

## ▼ Propiedades de los números reales

Todos sabemos que  $2 + 3 = 3 + 2$ , y  $5 + 7 = 7 + 5$ , y  $513 + 87 = 87 + 513$ , etc. En álgebra, expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde  $a$  y  $b$  son dos números cualquiera. En otras palabras, “ $a + b = b + a$ ” es una forma concisa de decir que “cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa”. Este hecho se conoce como *Propiedad Conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

### PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
<b>Conmutativas</b>		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
<b>Asociativas</b>		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
<b>Distributivas</b>		
$a(b + c) = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.
$(b + c)a = ab + ac$	$(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	

La Propiedad Distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La Figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualesquier números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

La Propiedad Distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interactúan una con otra.

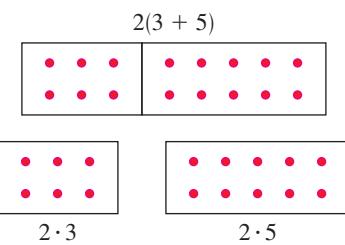


FIGURA 2 La Propiedad Distributiva

**EJEMPLO 1** | Uso de la Propiedad Distributiva

$  \begin{aligned}  \text{(a)} \quad & 2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \\  & = 2x + 6  \end{aligned}  $	Propiedad Distributiva Simplifique
$  \begin{aligned}  \text{(b)} \quad & \overbrace{(a + b)}^2(x + y) = (a + b)x + (a + b)y \\  & = (ax + bx) + (ay + by) \\  & = ax + bx + ay + by  \end{aligned}  $	Propiedad Distributiva Propiedad Distributiva Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11**


### ▼ Adición y sustracción

Ø No suponga que  $-a$  es un número negativo. Que  $-a$  sea negativo o positivo depende del valor de  $a$ . Por ejemplo, si  $a = 5$ , entonces  $-a = -5$ , un número negativo, pero si  $a = -5$ , entonces  $-a = -(-5) = 5$  (Propiedad 2), un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque  $a + 0 = a$  para cualquier número real  $a$ . Todo número real  $a$  tiene un **negativo**,  $-a$ , que satisface  $a + (-a) = 0$ . La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

#### PROPIEDADES DE NEGATIVOS

**Propiedad**

**1.**  $(-1)a = -a$

**Ejemplo**

$(-1)5 = -5$

**2.**  $-(-a) = a$

$-(-5) = 5$

**3.**  $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$

**4.**  $(-a)(-b) = ab$

$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$

**5.**  $-(a + b) = -a - b$

$-(3 + 5) = -3 - 5$

**6.**  $-(a - b) = b - a$

$-(5 - 8) = 8 - 5$

La Propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que  $a - b$  y  $b - a$  son negativos entre sí. La Propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

**EJEMPLO 2** | Uso de las propiedades de los negativos

Sea  $x$ ,  $y$  y  $z$  números reales.

**(a)**  $-(x + 2) = -x - 2$

 Propiedad 5:  $-(a + b) = -a - b$ 

**(b)**  $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$

 Propiedad 5:  $-(a + b) = -a - b$ 

$= -x - y + z$

 Propiedad 2:  $-(a) = a$ 
 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23**


## ▼ Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque  $a \cdot 1 = a$  para cualquier número real  $a$ . Todo número real  $a$  diferente de cero tiene un **recíproco**,  $1/a$ , que satisface  $a \cdot (1/a) = 1$ . La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si  $b \neq 0$ , entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos  $a \cdot (1/b)$  simplemente como  $a/b$ . Nos referimos a  $a/b$  como el **cociente** entre  $a$  y  $b$  o como la **fracción** de  $a$  sobre  $b$ ;  $a$  es el **numerador** y  $b$  es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

### PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Para <b>multiplicar fracciones</b> , multiplique numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Para <b>dividir fracciones</b> , multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Para <b>sumar fracciones</b> con el mismo denominador, <b>sume los numeradores</b> .
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Para <b>sumar fracciones con denominadores diferentes</b> , encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	Cancele números que sean <b>factores comunes</b> en numerador y denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ , así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	<b>Multiplicación cruzada.</b>

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el **Mínimo Común Denominador** (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 3 | Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe:  $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

**SOLUCIÓN** La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{y} \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Entonces el MCD es  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ . Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \quad \text{Use común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \quad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 25

## ▼ La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario  $O$ , llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo  $x$  está representado por el punto sobre la recta a una distancia de  $x$  unidades a la derecha del origen, y cada número negativo  $-x$  está representado por el punto a  $x$  unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto  $P$  se llama **coordenada de  $P$**  y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real**. A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

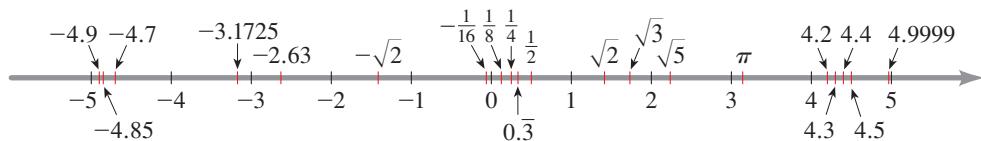


FIGURA 3 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que  **$a$  es menor que  $b$**  y escribimos  $a < b$  si  $b - a$  es un número positivo. Geométricamente, esto significa que  $a$  está a la izquierda de  $b$  en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que  **$b$  es mayor que  $a$**  y escribimos  $b > a$ . El símbolo  $a \leq b$  (o  $b \geq a$ ) quiere decir que  $a < b$  o que  $a = b$  y se lee “ $a$  es menor o igual a  $b$ ”. Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \quad -\pi < -3 \quad \sqrt{2} < 2 \quad 2 \leq 2$$

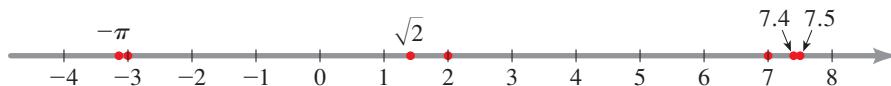


FIGURA 4

## ▼ Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si  $S$  es un conjunto, la notación  $a \in S$  significa que  $a$  es un elemento de  $S$ , y  $b \notin S$  quiere decir que  $b$  no es un elemento de  $S$ . Por ejemplo, si  $Z$  representa el conjunto de enteros, entonces  $-3 \in Z$  pero  $\pi \notin Z$ .

Algunos conjuntos pueden describirse si se colocan sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto  $A$  que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir  $A$  en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee “ $A$  es el conjunto de todas las  $x$  tales que  $x$  es un entero y  $0 < x < 7$ ”.

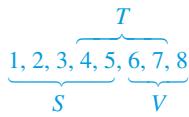
Si  $S$  y  $T$  son conjuntos, entonces su **unión**  $S \cup T$  es el conjunto formado por todos los elementos que están en  $S$  o  $T$  (o en ambos). La **intersección** de  $S$  y  $T$  es el conjunto  $S \cap T$

formado por todos los elementos que están en  $S$  y  $T$ . En otras palabras,  $S \cap T$  es la parte común de  $S$  y  $T$ . El **conjunto vacío**, denotado por  $\emptyset$ , es el conjunto que no contiene elementos.

### EJEMPLO 4 | Unión e intersección de conjuntos

Si  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $T = \{4, 5, 6, 7\}$ , y  $V = \{6, 7, 8\}$ , encuentre los conjuntos  $S \cup T$ ,  $S \cap T$  y  $S \cap V$ .

#### SOLUCIÓN



$$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Todos los elementos en  $S$  o  $T$

$$S \cap T = \{4, 5\}$$

Elementos comunes a  $S$  y  $T$

$$S \cap V = \emptyset$$

$S$  y  $V$  no tienen elementos en común

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39



FIGURA 5 El intervalo abierto  $(a, b)$

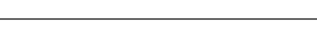


FIGURA 5 El intervalo cerrado  $[a, b]$

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si  $a < b$ , entonces el **intervalo abierto** de  $a$  a  $b$  está formado por todos los números entre  $a$  y  $b$  y se denota con  $(a, b)$ . El **intervalo cerrado** de  $a$  a  $b$  incluye los puntos extremos y se denota con  $[a, b]$ . Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Nótese que los paréntesis en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la Figura 5 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares  $[ ]$  y los círculos sólidos de la Figura 6 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

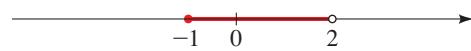
Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(a, \infty)$	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

El símbolo  $\infty$  (infinito) no representa un número. La notación  $(a, \infty)$ , por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha pero que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

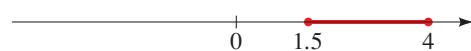
### EJEMPLO 5 | Graficación de intervalos

Expresé cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

(a)  $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$



(b)  $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$



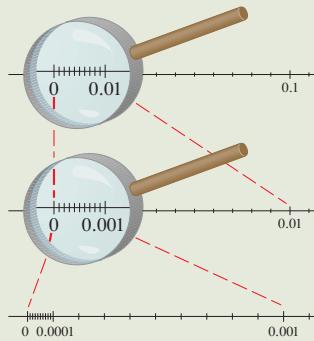
(c)  $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

### No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto

Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado  $[0, 1]$ , el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto  $(0, 1)$  no contiene número mínimo o máximo. Para ver esto, observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 más cercano, 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Siempre podemos hallar un número en el intervalo  $(0, 1)$  más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.



### EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafeque cada conjunto.

(a)  $(1, 3) \cap [2, 7]$       (b)  $(1, 3) \cup [2, 7]$

### SOLUCIÓN

(a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 2 \leq x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 7.

(b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 1 < x \leq 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 8.

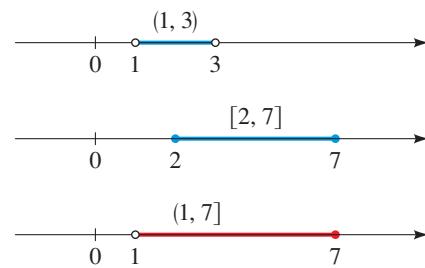
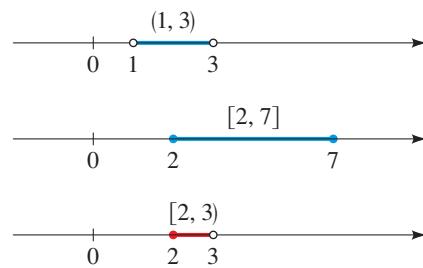


FIGURA 7  $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

FIGURA 8  $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 59

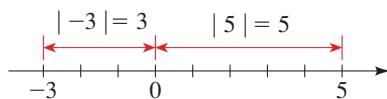


FIGURA 9

### Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número  $a$ , denotado por  $|a|$ , es la distancia de  $a$  a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos  $|a| \geq 0$  para todo número  $a$ . Recordando que  $-a$  es positivo cuando  $a$  es negativo, tenemos la siguiente definición.

#### DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si  $a$  es un número real, entonces el **valor absoluto** de  $a$  es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

### EJEMPLO 7 | Evaluación de valores absolutos de números

- (a)  $|3| = 3$   
 (b)  $|-3| = -(-3) = 3$   
 (c)  $|0| = 0$   
 (d)  $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$  (porque  $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$ )

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 65

Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

### PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

#### Propiedad

1.  $|a| \geq 0$

#### Ejemplo

$|-3| = 3 \geq 0$

#### Descripción

El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.

2.  $|a| = |-a|$

$|5| = |-5|$

Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.

3.  $|ab| = |a||b|$

$|-2 \cdot 5| = |-2||5|$

El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.

4.  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

$\left| \frac{12}{-3} \right| = \frac{|12|}{|-3|}$

El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números  $-2$  y  $11$ ? De la Figura 10 vemos que la distancia es  $13$ . Llegamos a esto si encontramos ya sea  $|11 - (-2)| = 13$  o  $|(-2) - 11| = 13$ . De esta observación hacemos la siguiente definición (vea Figura 11).

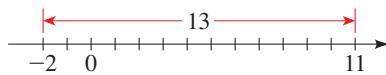


FIGURA 10

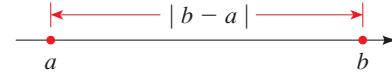


FIGURA 11 La longitud de un segmento de recta es  $|b - a|$

### DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si  $a$  y  $b$  son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos  $a$  y  $b$  sobre la recta real es

$$d(a, b) = |b - a|$$

De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$|b - a| = |a - b|$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de  $a$  a  $b$  es la misma distancia de  $b$  a  $a$ .

### EJEMPLO 8 | Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números  $-8$  y  $2$  es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ve en la Figura 12.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 73

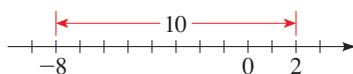


FIGURA 12

## 1.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- Dé un ejemplo de:
  - Un número natural
  - Un entero que no sea número natural
  - Un número racional que no sea entero
  - Un número irracional
- Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.
  - $ab = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\underline{\hspace{2cm}}$  Propiedad
  - $a + (b + c) = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\underline{\hspace{2cm}}$  Propiedad
  - $a(b + c) = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\underline{\hspace{2cm}}$  Propiedad
- El conjunto de números entre 2 y 7, pero que no los incluye, se puede escribir como sigue:  
 $\underline{\hspace{2cm}}$  en notación constructiva de conjuntos y  
 $\underline{\hspace{2cm}}$  en notación de intervalos.
- El símbolo  $|x|$  representa la  $\underline{\hspace{2cm}}$  del número  $x$ . Si  $x$  no es 0, entonces el signo  $|x|$  es siempre  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### HABILIDADES

- Mencione los elementos del conjunto dado que sean
  - números naturales
  - números enteros
  - números racionales
  - números irracionales
- $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\bar{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$
- $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$
- Exprese la propiedad de los números reales que se use.
  - $7 + 10 = 10 + 7$
  - $2(3 + 5) = (3 + 5)2$
  - $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$
  - $2(A + B) = 2A + 2B$
  - $(5x + 1)3 = 15x + 3$
  - $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$
  - $2x(3 + y) = (3 + y)2x$
  - $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$
- Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.
  - Propiedad Comutativa de la adición,  $x + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$
  - Propiedad Asociativa de la multiplicación,  $7(3x) = \underline{\hspace{2cm}}$
  - Propiedad Distributiva,  $4(A + B) = \underline{\hspace{2cm}}$
  - Propiedad Distributiva,  $5x + 5y = \underline{\hspace{2cm}}$

- 19-24** ■ Use propiedades de números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

- $3(x + y)$
- $(a - b)8$
- $4(2m)$
- $\frac{4}{3}(-6y)$
- $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$
- $(3a)(b + c - 2d)$

- 25-30** ■ Ejecute las operaciones indicadas.

- $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$
- $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
- $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$
- $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$
- $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$
- $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$
- $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$
- $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$
- $\frac{2}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{2}{3}}{2}$
- $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$
- $\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

- 31-32** ■ Ponga el símbolo correcto ( $<$ ,  $>$ , o  $=$ ) en el espacio.

- $3 \underline{\hspace{2cm}} \frac{7}{2}$
- $-3 \underline{\hspace{2cm}} -\frac{7}{2}$
- $3.5 \underline{\hspace{2cm}} \frac{7}{2}$
- $\frac{2}{3} \underline{\hspace{2cm}} 0.67$
- $\frac{2}{3} \underline{\hspace{2cm}} -0.67$
- $|0.67| \underline{\hspace{2cm}} |-0.67|$

- 33-36** ■ Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

- $-6 < -10$
- $\sqrt{2} > 1.41$
- $\frac{10}{11} < \frac{12}{13}$
- $-\frac{1}{2} < -1$
- $-\pi > -3$
- $8 \leq 9$
- $1.1 > 1.\bar{1}$
- $8 \leq 8$

- 37-38** ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

- $x$  es positivo
- $t$  es menor a 4
- $a$  es mayor o igual a  $\pi$
- $x$  es menor a  $\frac{1}{3}$  y mayor a  $-5$
- La distancia de  $p$  a 3 es como máximo 5
- $y$  es negativa
- $z$  es mayor a 1
- $b$  es como máximo 8
- $w$  es positiva y menor o igual a 17
- $y$  está al menos 2 unidades de  $\pi$

- 39-42** ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $B \cup C$
- $B \cap C$
- $A \cup C$
- $A \cap C$
- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B \cap C$

43-44 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \quad B = \{x \mid x < 4\}$$

$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

43. (a)  $B \cup C$

(b)  $B \cap C$

44. (a)  $A \cap C$

(b)  $A \cap B$

45-50 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

45.  $(-3, 0)$

46.  $(2, 8]$

47.  $[2, 8)$

48.  $[-6, -\frac{1}{2}]$

49.  $[2, \infty)$

50.  $(-\infty, 1)$

51-56 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

51.  $x \leq 1$

52.  $1 \leq x \leq 2$

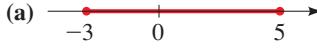
53.  $-2 < x \leq 1$

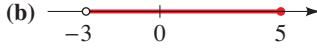
54.  $x \geq -5$

55.  $x > -1$

56.  $-5 < x < 2$

57-58 ■ Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

57. (a) 

(b) 

58. (a) 

(b) 

59-64 ■ Grafique el conjunto.

59.  $(-2, 0) \cup (-1, 1)$

60.  $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

61.  $[-4, 6] \cap [0, 8)$

62.  $[-4, 6) \cup [0, 8)$

63.  $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

64.  $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

65-70 ■ Evalúe cada expresión.

65. (a)  $|100|$

(b)  $|-73|$

66. (a)  $|\sqrt{5} - 5|$

(b)  $|10 - \pi|$

67. (a)  $||-6| - |-4||$

(b)  $\frac{-1}{|-1|}$

68. (a)  $|2 - |-12||$

(b)  $-1 - |1 - |-1||$

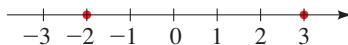
69. (a)  $|(-2) \cdot 6|$

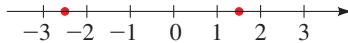
(b)  $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

70. (a)  $\left| \frac{-6}{24} \right|$

(b)  $\left| \frac{7 - 12}{12 - 7} \right|$

71-74 ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

71. 

72. 

73. (a)  $2$  y  $17$

(b)  $-3$  y  $21$

(c)  $\frac{11}{8}$  y  $-\frac{3}{10}$

74. (a)  $\frac{7}{15}$  y  $-\frac{1}{21}$

(b)  $-38$  y  $-57$

(c)  $-2.6$  y  $-1.8$

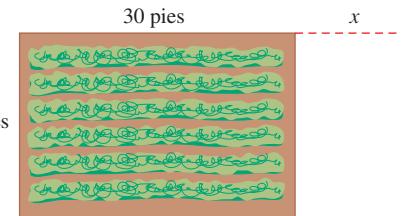
75-76 ■ Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Vea la nota al margen en la página 2.)

75. (a)  $0.\overline{7}$  (b)  $0.\overline{28}$  (c)  $0.\overline{57}$

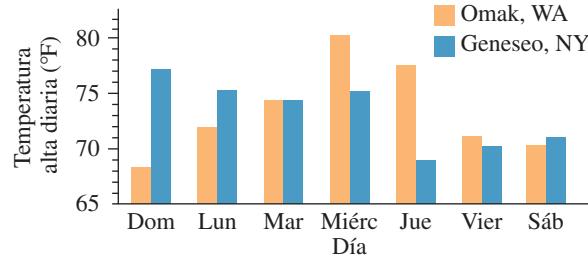
76. (a)  $5.\overline{23}$  (b)  $1.3\overline{7}$  (c)  $2.1\overline{35}$

## APLICACIONES

77. **Área de un jardín** El jardín de legumbres de Mary mide 20 pies por 30 pies, de modo que su área es de  $20 \times 30 = 600$  pies<sup>2</sup>. Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a  $A = 20(30 + x)$ . ¿Cuál propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como  $A = 600 + 20x$ ?



78. **Variación de temperatura** La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con  $T_O$  la temperatura en Omak y  $T_G$  la temperatura en Geneseo. Calcule  $T_O - T_G$  y  $|T_O - T_G|$  para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?

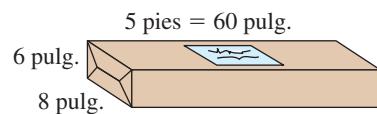
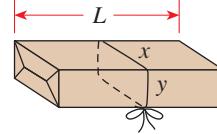


79. **Envío de un paquete por correo** La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea de más de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

(a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

(b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**80. Signos de números** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales tales que  $a > 0$ ,  $b < 0$  y  $c < 0$ . Encuentre el signo de cada expresión.

- (a)  $-a$       (b)  $-b$       (c)  $bc$   
 (d)  $a - b$       (e)  $c - a$       (f)  $a + bc$   
 (g)  $ab + ac$       (h)  $-abc$       (i)  $ab^2$

**81. Sumas y productos de números racionales e irracionales**

Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

**82. Combinación de números racionales con números irracionales**

$i\sqrt{2} + \sqrt{2}$  es racional o irracional?  $i\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$  es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?

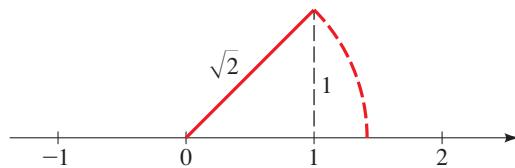
**83. Limitación del comportamiento de recíprocos**

Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre al tamaño de la fracción  $1/x$  cuando  $x$  crece? ¿Y cuando  $x$  disminuye?

$x$	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

$x$	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

**84. Números irracionales y geometría** Usando la siguiente figura, explique cómo localizar el punto  $\sqrt{2}$  en una recta numérica. ¿Puede localizar  $\sqrt{5}$  por medio de un método similar? ¿Qué puede decir de  $\sqrt{6}$ ? Haga una lista de otros números irracionales que puedan hallarse de este modo.



**85. Operaciones conmutativa y no conmutativa** Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

- (a) ¿La sustracción es conmutativa?  
 (b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

## 1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Exponentes enteros (negativos y positivos) ► Reglas para trabajar con exponentes ► Notación científica ► Radicales ► Exponentes racionales  
 ► Racionalización del denominador

En esta sección damos significado a expresiones como  $a^{m/n}$  en las que el exponente  $m/n$  es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces  $n$ .

## ▼ Exponentes enteros (negativos y positivos)

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo,  $5 \cdot 5 \cdot 5$  se escribe como  $5^3$ . En general, tenemos la siguiente definición.

## NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si  $a$  es cualquier número real y  $n$  es un entero positivo, entonces la  **$n$ -ésima potencia de  $a$**  es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número  $a$  se denomina **base**, y  $n$  se denomina **exponente**.

**EJEMPLO 1** | Notación exponencial

Observe la distinción entre  $(-3)^4$  y  $-3^4$ . En  $(-3)^4$  el exponente se aplica al  $-3$ , pero en  $-3^4$  el exponente se aplica sólo al  $3$ .

(a)  $(\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$

(b)  $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

(c)  $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos  $5^4$  por  $5^2$ :

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ factores}} \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que *para multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos sus exponentes*. En general, para cualquier número real  $a$  y cualesquier enteros positivos  $m$  y  $n$ , tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Entonces  $a^m a^n = a^{m+n}$ .

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando  $m$  y  $n$  fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si  $2^0 = 1$ . Igualmente, deseamos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si  $5^{-4} = 1/5^4$ . Estas observaciones llevan a la siguiente definición.

**EXONENTES CERO Y NEGATIVOS**

Si  $a \neq 0$  es cualquier número real y  $n$  es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

**EJEMPLO 2** | Exponentes cero y negativos

(a)  $(\frac{4}{7})^0 = 1$

(b)  $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$

(c)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 17**▼ Reglas para trabajar con exponentes**

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases  $a$  y  $b$  son números reales, y los exponentes  $m$  y  $n$  son enteros.

## LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

### DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 3 Si $m$ y $n$ son enteros positivos, tenemos

Si  $m$  y  $n$  son enteros positivos, tenemos

Los casos para los que  $m \leq 0$  o  $n \leq 0$  se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos.

## DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 4 Si $n$ es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot a \cdots \cdots a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdots \cdots b)}_{n \text{ factores}} = a^n b^n$$

Aquí hemos empleado repetidamente las Propiedades Comutativa y Asociativa. Si  $n \leq 0$ , la Ley 4 se puede demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar las Leyes 2 y 5.

### EJEMPLO 3 | Uso de las Leyes de Exponentes

$$\text{(a)} \quad x^4 x^7 \equiv x^{4+7} \equiv x^{11} \quad \text{[Ex 1: } a^m a^n \equiv a^{m+n} \text{]}$$

$$\mathbf{(b)} \quad y^4y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \frac{1}{y^3} \quad \text{Ley 1: } a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4 \quad \text{Ley 2: } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\text{(d)} \quad (b^4)^5 = b^{4 \cdot 5} = b^{20} \quad \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\text{(e)} \quad (3x)^3 = 3^3x^3 = 27x^3 \quad \text{Ley 4: } (ab)^n = a^n b^n$$

$$\text{(f)} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^5 = \frac{x^5}{2^5} = \frac{x^5}{32} \quad \text{Ley 5: } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$



AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 35, 37 Y 39

**EJEMPLO 4** | Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique

(a)  $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$       (b)  $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad (2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] & \text{Ley 4: } (ab)^n = a^n b^n \\
 &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) & \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn} \\
 &= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} & \text{Agrupe factores de la misma base} \\
 &= 54a^6b^{14} & \text{Ley 1: } a^m a^n = a^{m+n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3} \frac{(y^2)^4 x^4}{z^4} & \text{Leyes 5 y 4} \\
 &= \frac{x^3}{y^3} \frac{y^8 x^4}{z^4} & \text{Ley 3} \\
 &= (x^3 x^4) \left(\frac{y^8}{y^3}\right) \frac{1}{z^4} & \text{Agrupe factores de la misma base} \\
 &= \frac{x^7 y^5}{z^4} & \text{Leyes 1 y 2}
 \end{aligned}$$

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 43 Y 47**

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. A continuación damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

**LEYES DE EXPONENTES**

Ley	Ejemplo	Descripción
6.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7.	$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$ $\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

**DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 7** Usando la definición de exponentes negativos y luego la Propiedad 2 de fracciones (página 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar la Ley 6.

**EJEMPLO 5** | Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} & \quad \text{(b)} \quad \left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2}
 \end{aligned}$$

## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Aun cuando no observamos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la moderna tecnología, las matemáticas desempeñan una función cada vez más grande en nuestras vidas. Hoy en día es probable que alguien sea despertado por un reloj de alarma digital, hizo una llamada telefónica con transmisión digital, envió un mensaje de e-mail en la Internet, manejó un auto con inyección controlada digitalmente, escuchó música en un reproductor de CD o MP3, quizá vio televisión digital o un DVD, luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general, una propiedad, como por ejemplo la intensidad o frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen, o la temperatura de una habitación, son transformados en sucesiones de números por refinados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos y reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos.

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y, algunos de los más emocionantes, se dieron tan sólo en la década pasada.

En otro libro, llamado *Mathematics in the Modern World*, describiremos con más detalle el modo en que las matemáticas influyen en nuestras actividades diarias.

## SOLUCIÓN

- (a) Usamos la Ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

$t^{-4}$  pasa al denominador y se convierte en  $t^4$

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \quad \text{Ley 7}$$

- (b) Usamos la Ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left( \frac{y}{3z^3} \right)^{-2} = \left( \frac{3z^3}{y} \right)^2 \quad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \quad \text{Leyes 5 y 4}$$



## ▼ Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40,000,000,000,000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.0000000000000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

## NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se dice que un número positivo  $x$  está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$x = a \times 10^n$  donde  $1 \leq a < 10$  y  $n$  es un entero

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es  $4 \times 10^{13}$  km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe recorrerse 13 lugares a la derecha:

$$4 \times 10^{13} = 40,000,000,000,000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es  $1.66 \times 10^{-24}$  g, el exponente  $-24$  indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la *izquierda*:

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.0000000000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda

**EJEMPLO 6** | Cambio de notación decimal a científica

En notación científica, escriba cada uno de los números siguientes.

- (a) 56,920      (b) 0.000093

**SOLUCIÓN**

(a)  $56,920 = \underbrace{5.692}_{4 \text{ lugares}} \times 10^4$

(b)  $0.000093 = \underbrace{9.3}_{5 \text{ lugares}} \times 10^{-5}$

☞ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 77 Y 79

Para usar notación científica en una calculadora, presione la tecla marcada **EE** o **EXP** o **EEX** para ingresar el exponente. Por ejemplo, para ingresar el número  $3.629 \times 10^{15}$  en una calculadora TI-83, ingresamos

3.629 **2ND** **EE** 15

y en la pantalla se lee

3.629E15

Con frecuencia se usa notación científica en una calculadora para ver un número muy grande o uno muy pequeño. Por ejemplo, si usamos calculadora para elevar al cuadrado el número 1,111,111, la pantalla puede exhibir (dependiendo del modelo de calculadora) la aproximación

1.234568 12      o      1.23468 E12

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10 e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

**EJEMPLO 7** | Cálculo con notación científica

Si  $a \approx 0.00046$ ,  $b \approx 1.697 \times 10^{22}$ , y  $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$ , use calculadora para aproximar el cociente  $ab/c$ .

**SOLUCIÓN** Podríamos ingresar los datos usando notación científica, o bien, podríamos usar leyes de exponentes como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}} \\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18} \\ &\approx 2.7 \times 10^{36} \end{aligned}$$

En el Apéndice *Cálculo de cifras significativas* vea guías para trabajar con cifras significativas.

Expresamos la respuesta redondeada a dos cifras significativas porque el menos preciso de los números dados se expresa a dos cifras significativas.

☞ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 83 Y 85

**▼ Radicales**

Sabemos lo que  $2^n$  significa siempre que  $n$  sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo  $2^{4/5}$ , cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

El símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$  significa “la raíz positiva de”. Entonces

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Como  $a = b^2 \geq 0$ , el símbolo  $\sqrt{a}$  tiene sentido sólo cuando  $a \geq 0$ . Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, pero la notación  $\sqrt{9}$  está reservada para la raíz cuadrada positiva de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa, debemos escribir  $-\sqrt{9}$ , que es -3.

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces  $n$ . La raíz  $n$  de  $x$  es el número que, cuando se eleva a la  $n$  potencia, dará  $x$ .

### DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ $n$

Si  $n$  es cualquier entero positivo, entonces la **raíz  $n$  principal** de  $a$  se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa que } b^n = a$$

Si  $n$  es par, debemos tener  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{81} &= 3 & \text{porque } 3^4 = 81 & \text{y } 3 \geq 0 \\ \sqrt[3]{-8} &= -2 & \text{porque } (-2)^3 = -8\end{aligned}$$

Pero  $\sqrt{-8}$ ,  $\sqrt[4]{-8}$  y  $\sqrt[6]{-8}$  no están definidas. (Por ejemplo,  $\sqrt{-8}$  no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Nótese que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{pero} \quad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces la ecuación  $\sqrt[n]{a^2} = a$  no siempre es verdadera; lo es sólo cuando  $a \geq 0$ . No obstante, siempre podemos escribir  $\sqrt[n]{a^2} = |a|$ . Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas empleadas para trabajar con raíces  $n$  se citan en el recuadro siguiente. En cada propiedad suponemos que existen todas las raíces dadas.

### PROPIEDADES DE RAÍCES $n$

#### Propiedad

$$1. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$4. \sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

$$5. \sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{si } n \text{ es par}$$

#### Ejemplo

$$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

### EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces $n$

$$(a) \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3x} \quad \text{Factorice el cubo más grande}$$

$$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x} \quad \text{Propiedad 1: } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$$

$$= x\sqrt[3]{x} \quad \text{Propiedad 4: } \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$(b) \sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4} \quad \text{Propiedad 1: } \sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c}$$

$$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}|y| \quad \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a|$$

$$= 3x^2|y| \quad \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a|, |x^2| = x^2$$



Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, por ejemplo  $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ . Esto se puede hacer usando la Propiedad Distributiva. Así,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

### EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos  $a = 9$  y  $b = 16$ , entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$5 \stackrel{?}{=} 7$  Error!

(a)  $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$  Factorice los cuadrados más grandes

$$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$$
 Propiedad 1:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$
 Propiedad Distributiva

(b) Si  $b > 0$ , entonces

$$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$$
 Propiedad 1:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$$
 Propiedad 5,  $b > 0$

$$= (5 - b)\sqrt{b}$$
 Propiedad Distributiva

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 33

### ▼ Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, lo que es lo mismo, un *exponente fraccionario*, como por ejemplo  $a^{1/3}$ , necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo  $a^{1/n}$  de forma que sea consistente con las Leyes de Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz  $n$ ,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

#### DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional  $m/n$  en sus términos más elementales, donde  $m$  y  $n$  son enteros y  $n > 0$ , definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si  $n$  es par, entonces requerimos que  $a \geq 0$ .

Con esta definición se puede demostrar que *las Leyes de Exponentes también se cumplen para exponentes racionales*.

### EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

(a)  $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

(b)  $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$  Solución alternativa:  $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(c)  $125^{-1/3} = \frac{1}{125^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$  (d)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 21 Y 23



$$(b) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$(c) \sqrt[7]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 89 Y 91

## 1.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- (a) Usando notación exponencial, podemos escribir el producto  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$  como \_\_\_\_\_.  
(b) En la expresión  $3^4$ , el número 3 se denomina\_\_\_\_\_, y el número 4 se llama\_\_\_\_\_.
- (a) Cuando multiplicamos dos potencias con la misma base, \_\_\_\_\_ los exponentes. Por tanto,  $3^4 \cdot 3^5 =$  \_\_\_\_\_.  
(b) Cuando dividimos dos potencias con la misma base, \_\_\_\_\_ los exponentes. Por tanto,  $\frac{3^5}{3^2} =$  \_\_\_\_\_.
- (a) Usando notación exponencial, podemos escribir  $\sqrt[3]{5}$  como \_\_\_\_\_.  
(b) Usando radicales, podemos escribir  $5^{1/2}$  como \_\_\_\_\_.  
(c) ¿Hay diferencia entre  $\sqrt{5^2}$  y  $(\sqrt{5})^2$ ? Explique.
- Explique qué significa  $4^{3/2}$  y, a continuación, calcule  $4^{3/2}$  en dos formas diferentes:

$$(4^{1/2}) \boxed{\phantom{0}} = \text{_____} \quad \text{o} \quad (4^3) \boxed{\phantom{0}} = \text{_____}$$

- Explique cómo racionalizar un denominador y luego complete los siguientes pasos para racionalizar  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} = \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}}$$

- Encuentre la potencia faltante en el siguiente cálculo:

$$5^{1/3} \cdot 5 \boxed{\phantom{0}} = 5.$$

### HABILIDADES

- 7-14** ■ Escriba cada expresión radical usando exponentes, y cada expresión exponencial usando radicales.

Expresión radical	Expresión exponencial
7. $\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\boxed{\phantom{0}}$
8. $\sqrt[3]{7^2}$	$\boxed{\phantom{0}}$
9. $\boxed{\phantom{0}}$	$4^{2/3}$
10. $\boxed{\phantom{0}}$	$11^{-3/2}$
11. $\sqrt[5]{5^3}$	$\boxed{\phantom{0}}$
12. $\boxed{\phantom{0}}$	$2^{-1.5}$

Expresión radical	Expresión exponencial
13. $\boxed{\phantom{0}}$	$a^{2/5}$
14. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^5}}$	$\boxed{\phantom{0}}$
<b>15-24</b> ■ Evalúe cada expresión.	
15. (a) $-3^2$	(b) $(-3)^2$
16. (a) $5^4 \cdot 5^{-2}$	(b) $\frac{10^7}{10^4}$
17. (a) $(\frac{5}{3})^0 2^{-1}$	(b) $\frac{2^{-3}}{3^0}$
18. (a) $(-\frac{2}{3})^{-3}$	(b) $(\frac{3}{2})^{-2} \cdot \frac{9}{16}$
19. (a) $\sqrt{16}$	(b) $\sqrt[4]{16}$
20. (a) $\sqrt{64}$	(b) $\sqrt[3]{-64}$
21. (a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$	(b) $\sqrt[4]{256}$
22. (a) $\sqrt{7} \sqrt{28}$	(b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$
23. (a) $(\frac{4}{9})^{-1/2}$	(b) $(-32)^{2/5}$
24. (a) $1024^{-0.1}$	(b) $(-\frac{27}{8})^{2/3}$
<b>25-28</b> ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$ , $y = 4$ y $z = -1$ .	
25. $\sqrt{x^2 + y^2}$	26. $\sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$
27. $(9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3}$	28. $(xy)^{2z}$
<b>29-34</b> ■ Simplifique la expresión.	
29. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$	30. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$
31. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$	32. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$
33. $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$	34. $\sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y}$
<b>35-40</b> ■ Simplifique cada expresión.	
35. (a) $x^8 x^2$	(b) $(3y^2)(4y^5)$
36. (a) $x^{-5} x^3$	(b) $w^{-2} w^{-4} w^6$
37. (a) $\frac{y^{10} y^0}{y^7}$	(b) $\frac{x^6}{x^{10}}$
38. (a) $\frac{z^2 z^4}{z^3 z^{-1}}$	(b) $(2y^2)^3$
	(c) $(8x)^2$



84.  $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

85.  $\frac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

86.  $\frac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

87.  $\frac{(0.0000162)(0.01582)}{(594,621,000)(0.0058)}$

88.  $\frac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

89-92 ■ Racionalice el denominador.

89. (a)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$  (b)  $\sqrt{\frac{2}{x}}$  (c)  $\sqrt{\frac{x}{3}}$

90. (a)  $\sqrt{\frac{5}{12}}$  (b)  $\sqrt{\frac{x}{6}}$  (c)  $\sqrt{\frac{y}{2z}}$

91. (a)  $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$  (b)  $\frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$  (c)  $\frac{x}{y^{2/5}}$

92. (a)  $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$  (b)  $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$  (c)  $\frac{1}{c^{3/7}}$

93. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales con  $a > 0$ ,  $b < 0$  y  $c < 0$ . Determine el signo de cada expresión.

(a)  $b^5$  (b)  $b^{10}$  (c)  $ab^2c^3$

(d)  $(b-a)^3$  (e)  $(b-a)^4$  (f)  $\frac{a^3c^3}{b^6c^6}$

94. Demuestre las Leyes de Exponentes dadas para el caso en que  $m$  y  $n$  sean enteros positivos y  $m > n$ .

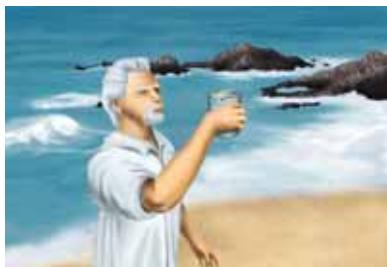
(a) Ley 2 (b) Ley 5 (c) Ley 6

## APLICACIONES

**95. Distancia a la estrella más cercana** Proxima Centauri, la estrella más cercana a nuestro sistema solar, está a 4.3 años luz de distancia. Use la información del Ejercicio 81(a) para expresar esta distancia en millas.

**96. Velocidad de la luz** La velocidad de la luz es de unas 186,000 mi/s. Use la información del Ejercicio 82(a) para hallar cuánto tarda un rayo de luz del Sol en llegar a la Tierra.

**97. Volumen de los océanos** El promedio de profundidad de los océanos es  $3.7 \times 10^3$  m y el área de los océanos es  $3.6 \times 10^{14}$  m<sup>2</sup>. ¿Cuál es el volumen total del océano en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)



**98. Deuda nacional** Al mes de julio de 2010, la población de Estados Unidos era de  $3.070 \times 10^8$ , y la deuda nacional era de  $1.320 \times 10^{13}$  dólares. ¿Cuánto era la parte que adeuda cada persona?

**99. Número de moléculas** Una sala sellada de un hospital, con medidas de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 L, y 22.4 L de cualquier gas contienen  $6.02 \times 10^{23}$  moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

**100. ¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima  $D$  a la que se puede ver desde lo alto de un edificio de altura  $h$  se calcula con la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde  $r = 3960$  millas es el radio de la Tierra y  $D$  y  $h$  también se miden en millas. ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, que está a 1135 pies sobre el suelo?



**101. Rapidez de un auto que patina** La policía usa la fórmula  $s = \sqrt{30fd}$  para calcular la rapidez  $s$  (en mi/h) a la que un auto se desplaza si patina  $d$  pies después de aplicar repentinamente los frenos. El número  $f$  es el coeficiente de fricción del pavimento, que es una medida de lo “resbaloso” de la carretera. La tabla siguiente da algunos cálculos comunes para  $f$ .

	Asfalto	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Mojado	0.5	0.4	0.1

- (a) Si un auto patina 65 pies en concreto mojado, ¿cuál era su velocidad cuando se aplicaron los frenos?  
 (b) Si un auto corre a 50 mi/h, ¿cuánto patinará en asfalto mojado?



- 102. Distancia de la Tierra al Sol** Se deduce de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento planetario, que el promedio de distancia de un planeta al Sol (en metros) es

$$d = \left( \frac{GM}{4\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde  $M = 1.99 \times 10^{30}$  kg es la masa del Sol,  $G = 6.67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> es la constante gravitacional, y  $T$  es el período de la órbita del planeta (en segundos). Use el dato de que el período de la órbita de la Tierra es de alrededor de 365.25 días para hallar la distancia de la Tierra al Sol.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

- 103. ¿Cuánto es mil millones?** Si usted tuviera un millón ( $10^6$ ) de dólares en una maleta, y gastara mil dólares ( $10^3$ ) al día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Gastaendo al mismo paso, ¿cuántos años tardaría en vaciar la maleta llena con *mil millones* ( $10^9$ ) de dólares?
- 104. Potencias fáciles que se ven difíciles** Calcule mentalmente estas expresiones. Use la ley de exponentes como ayuda.

(a)  $\frac{18^5}{9^5}$

(b)  $20^6 \cdot (0.5)^6$

- 105. Límite del comportamiento de potencias** Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre a la  $n$  raíz de 2 cuando  $n$  se hace grande? ¿Qué se puede decir acerca de la  $n$  raíz de  $\frac{1}{2}$ ?

$n$	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

$n$	$(\frac{1}{2})^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para  $n^{1/n}$ . ¿Qué ocurre a la  $n$  raíz de  $n$  cuando  $n$  se hace grande?

- 106. Comparación de raíces** Sin usar calculadora, determine cuál número es más grande en cada par.

(a)  $2^{1/2}$  o  $2^{1/3}$

(b)  $(\frac{1}{2})^{1/2}$  o  $(\frac{1}{2})^{1/3}$

(c)  $7^{1/4}$  o  $4^{1/3}$

(d)  $\sqrt[3]{5}$  o  $\sqrt{3}$

## 1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma y resta de polinomios ► Multiplicación de expresiones algebraicas ► Fórmulas de productos notables ► Factorización de factores comunes ► Factorización de trinomios ► Fórmulas especiales de factorización ► Factorización por agrupación de términos

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una **expresión algebraica**. Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \quad \sqrt{x} + 10 \quad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma  $ax^k$ , donde  $a$  es un número real y  $k$  es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

### POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable  $x$  es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son números reales, y  $n$  es un entero no negativo. Si  $a_n \neq 0$ , entonces el polinomio tiene **grado  $n$** . Los monomios  $a_k x^k$  que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

## ▼ Suma y resta de polinomios

### Propiedad Distributiva

$$ac + bc = (a + b)c$$



Para restar polinomios, tenemos que recordar que **si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitemos el paréntesis**:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva,  $a(b + c) = ab + ac$ , con  $a = -1$ .]

### EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

- (a) Encuentre la suma  $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$ .  
 (b) Encuentre la diferencia  $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$ .

#### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & (x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x) \\
 &= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 && \text{Agrupe términos semejantes} \\
 &= 2x^3 - x^2 - 5x + 4 && \text{Combine términos semejantes} \\
 \text{(b)} \quad & (x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x) \\
 &= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x && \text{Propiedad Distributiva} \\
 &= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4 && \text{Agrupe términos semejantes} \\
 &= -11x^2 + 9x + 4 && \text{Combine términos semejantes}
 \end{aligned}$$

☞ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 15 Y 17

## ▼ Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

↑      ↑      ↑      ↑  
 F      O      I      L

El acrónimo **FOIL** nos ayuda a recordar que el producto de dos binomios es la suma de los productos de los primeros (**First**) términos, los términos externos (**Outer**), los términos internos (**Inner**) y los últimos (**Last**).

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la Propiedad Distributiva y las Leyes de Exponentes.

### EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios usando FOIL

$$(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5 \quad \begin{array}{c} \text{Propiedad Distributiva} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{F} \quad \text{O} \quad \text{I} \quad \text{L} \end{array}$$

$$= 6x^2 - 7x - 5 \quad \begin{array}{c} \text{Combine términos semejantes} \end{array}$$

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

Cuando multiplicamos trinomios u otros polinomios con más términos, usamos la Propiedad Distributiva. También es útil acomodar nuestro trabajo en forma de tabla. El siguiente ejemplo ilustra ambos métodos.

### EJEMPLO 3 | Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto:  $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

**SOLUCIÓN 1:** Usando la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned} (2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes} \\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes} \end{aligned}$$

**SOLUCIÓN 2:** Usando forma de tabla

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 4 \\ 2x + 3 \\ \hline 3x^2 - 15x + 12 \\ 2x^3 - 10x^2 + 8x \\ \hline 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por 3} \\ \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 2x \\ \text{Sume términos} \end{array}$$

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

## ▼ Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

Vea en el *Proyecto de descubrimiento*, citado en la página 34, una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

### FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si  $A$  y  $B$  son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1.  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$  Suma y producto de términos iguales
2.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  Cuadrado de una suma
3.  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$  Cuadrado de una diferencia
4.  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$  Cubo de una suma
5.  $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$  Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar  $(x^2 + y^3)^2$  usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo  $x^2$  por  $A$  y  $y^3$  por  $B$ , para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

### EJEMPLO 4 | Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

(a)  $(3x + 5)^2$       (b)  $(x^2 - 2)^3$

#### SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo  $A = 3x$  y  $B = 5$  en la Fórmula 2 de Productos, obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

(b) Sustituyendo  $A = x^2$  y  $B = 2$  en la Fórmula 5 de Productos, obtenemos:

$$(x^2 - 2)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3$$

$$= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 41

### EJEMPLO 5 | Uso de las fórmulas de productos notables

Encuentre cada producto.

(a)  $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$       (b)  $(x + y - 1)(x + y + 1)$

#### SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo  $A = 2x$  y  $B = \sqrt{y}$  en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(b) Si agrupamos  $x + y$  y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con  $A = x + y$  y  $B = 1$ .

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = [(x + y) - 1][(x + y) + 1]$$

$$= (x + y)^2 - 1^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - 1$$

Fórmula de Producto 1

Fórmula de Producto 2

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 55 Y 59

### ▼ Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

#### FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

#### ← EXPANSIÓN

Decimos que  $x - 2$  y  $x + 2$  son **factores** de  $x^2 - 4$ .

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

### EJEMPLO 6 | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a)  $3x^2 - 6x$

(b)  $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

(c)  $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \quad \checkmark$$

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$\begin{aligned} 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \\ = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

#### SOLUCIÓN

(a) El máximo factor común en los términos  $3x^2$  y  $-6x$  es  $3x$ , de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

(b) Observamos que

$8, 6$  y  $-2$  tienen el máximo factor común 2

$x^4, y^3$  y  $x$  tienen el máximo factor común  $x$

$y^2, y^3$  y  $y^4$  tienen el máximo factor común  $y^2$

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es  $2xy^2$ , y tenemos

$$\begin{aligned} 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \end{aligned}$$

(c) Los dos términos tienen el factor común  $x - 3$ .

$$\begin{aligned} (2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

#### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 61, 63 Y 65

### ▼ Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ , observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números  $r$  y  $s$  tales que  $r + s = b$  y  $rs = c$ .

### EJEMPLO 7 | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice:  $x^2 + 7x + 12$

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12 \quad \checkmark$$

**SOLUCIÓN** Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
factores de 12

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

Para factorizar un trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 1$ , buscamos factores de la forma  $px + r$  y  $qx + s$ :

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
factores de  $a$        $\downarrow$   $\downarrow$   
 $ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$   
                     $\uparrow$   $\uparrow$   
                    factores de  $c$

Por tanto, tratamos de hallar números  $p, q, r$  y  $s$  tales que  $pq = a$  y  $rs = c$ ,  $ps + qr = b$ . Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir  $p, q, r$  y  $s$ .

**EJEMPLO 8** | Factorización de  $ax^2 + bx + c$  por ensayo y error

Factorice:  $6x^2 + 7x - 5$

**SOLUCIÓN** Podemos factorizar 6 como  $6 \cdot 1$  o  $3 \cdot 2$  y  $-5$  como  $-5 \cdot 1$  o  $5 \cdot (-1)$ . Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización

VERIFIQUE SU RESPUESTA

### La multiplicación da

$$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5 \quad \checkmark$$

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

↓                    ↓  
 factores de 6                    factores de -5



**EJEMPLO 9** | Reconocer la forma de una expresión

Factorice lo siguiente.

(a)  $x^2 - 2x - 3$

$$\mathbf{(b)} \quad (5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$$

## SOLUCIÓN

**(a)**  $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$       [Ensayo y error](#)

(b) Esta expresión es de la forma

$$\boxed{\phantom{0}}^2 - 2 \boxed{\phantom{0}} - 3$$

donde  $\square$  representa  $5a + 1$ . Ésta es la misma forma que la expresión de la parte (a), de modo que se factoriza como  $(\square - 3)(\square + 1)$ .

$$(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3 = [(5a + 1) - 3][(5a + 1) + 1] \\ = (5a - 2)(5a + 2)$$



## ▼ Fórmulas especiales de factorización

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

## FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
$1. A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
$2. A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
$3. A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
$4. A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
$5. A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

**EJEMPLO 10** | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente

**(a)**  $4x^2 = 25$       **(b)**  $(x + y)^2 = z^2$

## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

### Cambio de palabras, sonido e imágenes en números

Imágenes, sonido y texto se transmiten rutinariamente de un lugar a otro por la Internet, aparatos de fax o módem. ¿Cómo pueden estas cosas transmitirse por cables telefónicos? La clave para hacer esto es cambiarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo cambiar texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia  $A = 00000001, B = 00000010, C = 00000011, D = 00000100, E = 00000101$ , y así sucesivamente. La palabra "BED" (CAMA) se convierte entonces en  $000000100000010100000100$ . Al leer los dígitos en grupos de ocho, es posible transformar este número de nuevo a la palabra "BED".

Cambiar sonidos a bits es más complicado. Una onda de sonido puede ser graficada en un osciloscopio o en computadora. La gráfica se descompone a continuación matemáticamente en componentes más sencillos correspondientes a las diferentes frecuencias del sonido original. (Aquí se usa una rama de las matemáticas de nombre Análisis de Fourier.) La intensidad de cada componente es un número, y el sonido original puede reconstruirse a partir de estos números. Por ejemplo, se almacena música en un CD como una sucesión de bits; puede verse como  $1010100010100101001010101010000010111101010001010111\dots$  (Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits). El reproductor de CD reconstruye la música a partir de los números presentes en el CD.

Cambiar imágenes a números comprende expresar el color y brillantez de cada punto (o píxel) en un número. Esto se hace en forma muy eficiente usando una rama de las matemáticas llamada teoría ondulatoria. El FBI emplea trenes de ondas como forma compacta de almacenar en archivo millones de huellas dactilares que necesitan.

## SOLUCIÓN

- (a) Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con  $A = 2x$  y  $B = 5$ , tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

- (b) Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con  $A = x + y$  y  $B = z$ .

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 75 Y 109

## EJEMPLO 11 | Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

(a)  $27x^3 - 1$       (b)  $x^6 + 8$

## SOLUCIÓN

- (a) Usando la fórmula de la Diferencia de Cubos con  $A = 3x$  y  $B = 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} 27x^3 - 1 &= (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

- (b) Usando la fórmula de Suma de Cubos con  $A = x^2$  y  $B = 2$ , tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 77 Y 79

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{o} \quad A^2 - 2AB + B^2$$

Por lo tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ( $2AB$  o  $-2AB$ ) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

## EJEMPLO 12 | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

(a)  $x^2 + 6x + 9$       (b)  $4x^2 - 4xy + y^2$

## SOLUCIÓN

- (a) Aquí  $A = x$  y  $B = 3$ , de modo que  $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$ . Como el término medio es  $6x$ , el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

- (b) Aquí  $A = 2x$  y  $B = y$ , de modo que  $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$ . Como el término medio es  $-4xy$ , el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 105 Y 107

Cuando factorizamos una expresión, a veces el resultado puede factorizarse aún más. En general, *primero factorizamos factores comunes* y luego inspeccionamos el resultado para ver si puede ser factorizado por cualquiera de los otros métodos de esta sección. Repetimos este proceso hasta que hayamos factorizado completamente la expresión.

**EJEMPLO 13** | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

(a)  $2x^4 - 8x^2$       (b)  $x^5y^2 - xy^6$

**SOLUCIÓN**

(a) Primero factorizamos la potencia de  $x$  que tenga el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x - 2)(x + 2) && \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

(b) Primero factorizamos las potencias de  $x$  y de  $y$  que tengan los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 115 Y 117

En el siguiente ejemplo factorizamos variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se presenta en cálculo.

**EJEMPLO 14** | Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice lo siguiente.

(a)  $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$       (b)  $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

**SOLUCIÓN**

(a) Factorice la potencia de  $x$  que tenga el *exponente más pequeño*, es decir,  $x^{-1/2}$ .

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Factorice } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) && \text{Factorice la ecuación de} \\ &&& \text{segundo grado } x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

(b) Factorice la potencia de  $2 + x$  que tenga el *exponente más pequeño*, es decir,  $(2 + x)^{-2/3}$ .

$$\begin{aligned} (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} &= (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] && \text{Factorice } (2 + x)^{-2/3} \\ &= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) && \text{Simplifique} \\ &= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) && \text{Factorice 2} \end{aligned}$$

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

Para ver que haya factorizado correctamente, multiplique usando las Leyes de Exponentes.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) &= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} && \text{(b)} \quad (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] \\ && \checkmark &= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} && \checkmark \end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 91 Y 93 **Factorización por agrupación de términos**

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

**EJEMPLO 15** | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a)  $x^3 + x^2 + 4x + 4$       (b)  $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

**SOLUCIÓN**

(a)  $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$   
 $= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$   
 $= (x^2 + 4)(x + 1)$

Agrupe términos  
Factorice factores comunes  
Factorice  $x + 1$  de cada término

(b)  $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$   
 $= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$   
 $= (x^2 - 3)(x - 2)$

Agrupe términos  
Factorice factores comunes  
Factorice  $x - 2$  de cada término

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 83

**1.3 EJERCICIOS****CONCEPTOS**

1. Considere el polinomio  $2x^5 + 6x^4 + 4x^3$ .

¿Cuántos términos tiene este polinomio? \_\_\_\_

Enliste los términos: \_\_\_\_

¿Cuál factor es común a cada término? \_\_\_\_

Factorice el polinomio:  $2x^5 + 6x^4 + 4x^3 =$  \_\_\_\_.

2. Para factorizar el trinomio  $x^2 + 7x + 10$ , buscamos dos enteros cuyo producto sea \_\_\_\_ y cuya suma sea \_\_\_\_.

Estos enteros son \_\_\_\_ y \_\_\_\_, de modo que el trinomio se factoriza como \_\_\_\_.

3. La fórmula de productos notables para la “suma de un cuadrado” es  $(A + B)^2 =$  \_\_\_\_.

Por tanto,  $(2x + 3)^2 =$  \_\_\_\_.

4. La fórmula de productos notables para la “suma y diferencia de los mismos términos” es  $(A + B)(A - B) =$  \_\_\_\_.

Entonces  $(5 + x)(5 - x) =$  \_\_\_\_.

5. La fórmula de factorización especial para “la diferencia de cuadrados” es  $A^2 - B^2 =$  \_\_\_\_\_. Entonces,  $4x^2 - 25$  se factoriza como \_\_\_\_\_.

6. La fórmula de factorización especial para un “cuadrado perfecto” es  $A^2 + 2AB + B^2 =$  \_\_\_\_\_. Entonces  $x^2 + 10x + 25$  se factoriza como \_\_\_\_\_.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
9. $-8$			
10. $\frac{1}{2}x^7$			
11. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
12. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

13-22 ■ Encuentre la suma, diferencia o producto.

13.  $(12x - 7) - (5x - 12)$       14.  $(5 - 3x) + (2x - 8)$

15.  $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

16.  $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

17.  $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

18.  $3(x - 1) + 4(x + 2)$

19.  $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

20.  $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

21.  $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

22.  $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

23-28 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando el método FOIL y simplifique.

23.  $(3t - 2)(7t - 4)$

24.  $(4s - 1)(2s + 5)$

25.  $(3x + 5)(2x - 1)$

26.  $(7y - 3)(2y - 1)$

27.  $(x + 3y)(2x - y)$

28.  $(4x - 5y)(3x - y)$

29-44 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifique.

29.  $(3x + 4)^2$

30.  $(1 - 2y)^2$

31.  $(2u + v)^2$

32.  $(x - 3y)^2$

33.  $(2x + 3y)^2$

34.  $(r - 2s)^2$

35.  $(x + 5)(x - 5)$

36.  $(y - 3)(y + 3)$

37.  $(3x - 4)(3x + 4)$

38.  $(2y + 5)(2y - 5)$

39.  $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$

40.  $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

**HABILIDADES**

7-12 ■ Complete la tabla siguiente diciendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio; a continuación, haga una lista de sus términos y exprese su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
7. $x^2 - 3x + 7$			
8. $2x^5 + 4x^2$			

41.  $(y + 2)^3$

43.  $(1 - 2r)^3$

45-60 ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

45.  $(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$

47.  $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$

49.  $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$

51.  $y^{1/3}(y^{2/3} + y^{5/3})$

53.  $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$

55.  $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

56.  $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

57.  $((x - 1) + x^2)((x - 1) - x^2)$

58.  $(x + (2 + x^2))(x - (2 + x^2))$

59.  $(2x + y - 3)(2x + y + 3)$  60.  $(x + y + z)(x - y - z)$

61-66 ■ Factorice el factor común.

61.  $-2x^3 + 16x$

63.  $y(y - 6) + 9(y - 6)$

65.  $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$

67-74 ■ Factorice el trinomio.

67.  $x^2 + 2x - 3$

69.  $8x^2 - 14x - 15$

71.  $3x^2 - 16x + 5$

73.  $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

74.  $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

75-82 ■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

75.  $9a^2 - 16$

77.  $27x^3 + y^3$

79.  $8s^3 - 125t^3$

81.  $x^2 + 12x + 36$

83-88 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

83.  $x^3 + 4x^2 + x + 4$

85.  $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

87.  $x^3 + x^2 + x + 1$

89-94 ■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

89.  $x^{5/2} - x^{1/2}$

91.  $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$

93.  $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

94.  $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

95-124 ■ Factorice por completo la expresión.

95.  $12x^3 + 18x$

97.  $x^2 - 2x - 8$

42.  $(x - 3)^3$

44.  $(3 + 2y)^3$

99.  $2x^2 + 5x + 3$

101.  $9x^2 - 36x - 45$

103.  $49 - 4y^2$

105.  $t^2 - 6t + 9$

107.  $4x^2 + 4xy + y^2$

109.  $(a + b)^2 - (a - b)^2$

111.  $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$

113.  $8x^3 - 125$

115.  $x^3 + 2x^2 + x$

117.  $x^4y^3 - x^2y^5$

119.  $2x^3 + 4x^2 + x + 2$

121.  $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

122.  $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

123.  $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

124.  $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

125-128 ■ Factorice por completo la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la “Regla del Producto”.)

125.  $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

126.  $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

127.  $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

128.  $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

129. (a) Demuestre que  $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$ .

(b) Demuestre que  $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$ .

(c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

(d) Factorice por completo:  $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ .

130. Verifique las fórmulas especiales de factorización 4 y 5 al expandir sus lados derechos.

## APLICACIONES

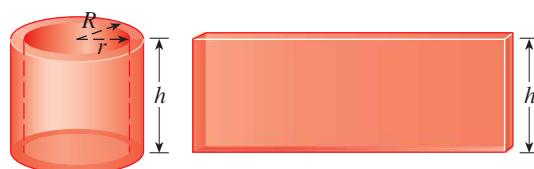
131. **Volumen de concreto** Se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas vaciadas en concreto, como se muestra en la figura. Usando la fórmula para el volumen de un cilindro dada al final de este libro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

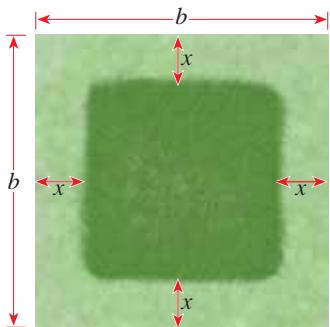
$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{grosor}$$

Use el diagrama “desenrollado” para explicar por qué esto tiene sentido geométricamente hablando.



- 132. Podar un campo** Cada semana, un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y animales pequeños (vea la figura). El campo mide  $b$  pies por  $b$  pies, y la franja podada es de  $x$  pies de ancho.

- (a) Explique por qué el área de la parte podada es  $b^2 - (b - 2x)^2$ .  
 (b) Factorice la expresión de la parte (a) para demostrar que el área de la parte podada también es  $4x(b - x)$ .



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

### 133. Grados de sumas y productos de polinomios

Forme varios pares de polinomios y, a continuación, calcule la suma y producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, conteste las siguientes preguntas.

- (a) ¿Cómo está relacionado el grado del producto con los grados de los polinomios originales?  
 (b) ¿Cómo está relacionado el grado de la suma con los grados de los polinomios originales?
- 134. El poder de las fórmulas algebraicas** Use la fórmula de una diferencia de cuadrados para factorizar  $17^2 - 16^2$ . Nótese que es fácil calcular mentalmente la forma factorizada pero no es tan fácil calcular la forma original en esta forma. Evalúe mentalmente cada expresión:

- (a)  $528^2 - 527^2$   
 (b)  $122^2 - 120^2$   
 (c)  $1020^2 - 1010^2$

A continuación, use la fórmula de productos notables

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar mentalmente estos productos:

- (d)  $79 \cdot 51$   
 (e)  $998 \cdot 1002$

### 135. Diferencias de potencias pares

- (a) Factorice por completo las expresiones:  $A^4 - B^4$  y  $A^6 - B^6$ .  
 (b) Verifique que  $18,335 = 12^4 - 7^4$  y que  $2,868,335 = 12^6 - 7^6$ .  
 (c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para factorizar los enteros  $18,335$  y  $2,868,335$ . A continuación demuestre que en estas dos factorizaciones todos los factores son números primos.

### 136. Factorización de $A^n - 1$

Verifique estas fórmulas al expandir y simplificar el lado derecho.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$

$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$

$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Con base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa usted que sería posible factorizar  $A^5 - 1$ ? Verifique su conjectura. Ahora generalice el patrón que haya observado para obtener una fórmula de factorización para  $A^n - 1$ , donde  $n$  es un entero positivo.

### 137. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$

A veces se puede factorizar con facilidad un trinomio de la forma  $x^4 + ax^2 + b$ . Por ejemplo,

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$$

Pero  $x^4 + 3x^2 + 4$  no se puede factorizar así. En cambio, podemos usar el siguiente método.

$$x^4 + 3x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2$$

Sume y  
reste  $x^2$

$$= (x^2 + 2)^2 - x^2$$

Factorice el  
cuadrado perfecto

$$= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x]$$

Diferencia de  
cuadrados

$$= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$$

Factorice lo siguiente, usando cualquier método apropiado.

- (a)  $x^4 + x^2 - 2$   
 (b)  $x^4 + 2x^2 + 9$   
 (c)  $x^4 + 4x^2 + 16$   
 (d)  $x^4 + 2x^2 + 1$

### PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

### Visualización de una fórmula

En este proyecto descubrimos interpretaciones geométricas de algunas fórmulas de productos notables. El lector puede hallar el proyecto en el sitio web del libro: [www.stewartmath.com](http://www.stewartmath.com)

## 1.4 EXPRESIONES RACIONALES

Dominio de una expresión algebraica ► Simplificación de expresiones racionales ► Multiplicación y división de expresiones racionales ► Suma y resta de expresiones racionales ► Fracciones compuestas ► Racionalización del denominador o el numerador ► Evitar errores comunes

El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria**. A continuación veamos algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \quad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \quad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios. Por ejemplo, las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \quad \frac{x}{x^2+1} \quad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

En esta sección aprendemos a ejecutar operaciones algebraicas de expresiones racionales.

### ▼ Dominio de una expresión algebraica

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

#### EJEMPLO 1 | Hallar el dominio de una expresión

Encuentre los dominios de las siguientes expresiones.

(a)  $2x^2 + 3x - 1$       (b)  $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$       (c)  $\frac{\sqrt{x}}{x - 5}$

#### SOLUCIÓN

- (a) Este polinomio está definido para toda  $x$ . Entonces, el dominio es el conjunto  $\mathbb{R}$  de números reales.  
 (b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El denominador sería 0 si  
 $x = 2$  o  $x = 3$

Como el denominador es cero cuando  $x = 2$  o  $3$ , la expresión no está definida para estos números. El dominio  $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$ .

- (c) Para que el numerador esté definido, debemos tener  $x \geq 0$ . Tampoco podemos dividir entre 0, de modo que  $x \neq 5$ .

Asegúrese de tener  $x \geq 0$   
 para tomar la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador  
 sería 0 si  $x = 5$

Entonces, el dominio es  $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$ .

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11

## ▼ Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto nos permite **cancelar** factores comunes del numerador y el denominador.

### EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Simplifique:  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

#### SOLUCIÓN

⊗ No podemos cancelar las  $x^2$  en  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$  porque  $x^2$  no es un factor.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)}$$

Factorice

$$= \frac{x + 1}{x + 2}$$

Cancela factores comunes

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 17

## ▼ Multiplicación y división de expresiones racionales

Para  **multiplicar expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

### EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique:  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1}$

#### SOLUCIÓN

Primero factorizamos.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} &= \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} \\ &= \frac{3(x - 1)(x + 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2} \\ &= \frac{3(x + 3)}{x + 4} \end{aligned}$$

Factorice

Propiedad de fracciones

Cancela factores comunes

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 25

Para **dividir expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto dice que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

### EJEMPLO 4 | División de expresiones racionales

Ejecute la división indicada y simplifique:

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$$

#### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} &= \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4} && \text{Invierta y multiplique} \\ &= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} && \text{Factorice} \\ &= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} && \text{Cancela factores comunes} \end{aligned}$$

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31



### ▼ Suma y resta de expresiones racionales

#### 🚫 Evite hacer el siguiente error:

$$\frac{A}{B+C} \cancel{=} \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si hacemos  $A = 2$ ,  $B = 1$  y  $C = 1$ , entonces vemos el error:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+1} &\cancel{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1} \\ \frac{2}{2} &\cancel{=} 2 + 2 \\ 1 &\cancel{=} 4 \quad \text{Error!} \end{aligned}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD) como se explica en la Sección 1.1. El MCD se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

### EJEMPLO 5 | Sumar y restar expresiones racionales

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

$$\text{(a)} \frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} \quad \text{(b)} \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

#### SOLUCIÓN

(a) Aquí el MCD es simplemente el producto de  $(x-1)(x+2)$ .

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} &= \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} && \text{Escriba fracciones usando el MCD} \\ &= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)} && \text{Sume fracciones} \\ &= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)} && \text{Combine los términos del numerador} \end{aligned}$$

(b) El MCD de  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$  y  $(x + 1)^2$  es  $(x - 1)(x + 1)^2$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} &= \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{2}{(x + 1)^2} && \text{Factorice} \\
 &= \frac{(x + 1) - 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)^2} && \text{Combine fracciones} \\
 &= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x - 1)(x + 1)^2} && \text{usando el MCD} \\
 &= \frac{3 - x}{(x - 1)(x + 1)^2} && \text{Propiedad Distributiva} \\
 &= \frac{3 - x}{(x - 1)(x + 1)^2} && \text{Combine los términos} \\
 &&& \text{del numerador}
 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 43 Y 45

## ▼ Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

### EJEMPLO 6 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: 
$$\frac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}}$$

**SOLUCIÓN 1** Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}} &= \frac{\frac{x + y}{y}}{\frac{x - y}{x}} = \frac{x + y}{y} \cdot \frac{x}{x - y} \\
 &= \frac{x(x + y)}{y(x - y)}
 \end{aligned}$$

## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Cortesía de NASA



### Códigos para corregir errores

Las imágenes enviadas por la nave *Pathfinder (Explorador)* desde la superficie de Marte el 4 de julio de 1997, eran asombrosamente claras. Pero pocas personas que vieron estas imágenes estaban conscientes de las complejas matemáticas utilizadas para lograr esta hazaña. La distancia

a Marte es enorme, y el ruido de fondo (o estática) es muchas veces más fuerte que la señal original emitida por la nave espacial. Entonces, cuando los científicos reciben la señal, está llena de errores. Para obtener una imagen clara, los errores deben hallarse y corregirse. Este mismo problema de errores se encuentra en forma rutinaria en la transmisión de registros bancarios cuando una persona usa un cajero automático o de voz cuando habla por teléfono.

Para entender la forma en que los errores se localizan y corrigen, primero debemos entender que para transmitir imágenes o texto los transformamos en bits (los dígitos 0 o 1; vea página 30). Para ayudar al re-

ceptor a reconocer errores, el mensaje se "codifica" al insertar bits adicionales. Por ejemplo, suponga que usted desea transmitir el mensaje "10100". Un código muy sencillo es como sigue: envía cada dígito un millón de veces. La persona que recibe el mensaje lo lee en bloques de un millón de dígitos. Si el primer bloque es principalmente de números 1, concluye que es probable que usted esté tratando de transmitir un 1, y así sucesivamente. Decir que este código no es eficiente es un poco modesto; requiere enviar un millón de veces más datos que el mensaje original. Otro método inserta "dígitos de comprobación". Por ejemplo, cada bloque de ocho dígitos inserta un noveno dígito; el dígito insertado es 0 si hay un número par de números 1 en el bloque y 1 si hay un número impar. Por lo tanto, si un solo dígito está mal (un 0 cambiado a un 1, o viceversa), los dígitos de prueba nos permiten reconocer que ha ocurrido un error. Este método no nos dice dónde está el error, de modo que no podemos corregirlo. Los modernos códigos que corren errores usan interesantes algoritmos matemáticos que requieren insertar relativamente pocos dígitos pero permiten al receptor no sólo reconocer errores, sino también corregirlos. El primer código corrector de errores fue inventado en la década de 1940 por Richard Hamming en el MIT. Es interesante observar que el idioma inglés tiene un mecanismo corrector de errores ya integrado; para probarlo, trate de leer esta oración cargada de errores: Gve mo libty ox biv ne deth.

**SOLUCIÓN 2** Encontramos el MCD de todas las fracciones en la expresión y, a continuación, lo multiplicamos por el numerador y denominador. En este ejemplo, el MCD de todas las fracciones es  $xy$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}} &= \frac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}} \cdot \frac{xy}{xy} && \text{Multiplique numerador y denominador por } xy \\ &= \frac{x^2 + xy}{xy - y^2} && \text{Simplifique} \\ &= \frac{x(x + y)}{y(x - y)} && \text{Factorice} \end{aligned}$$

☞ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 59 Y 61

Los siguientes dos ejemplos muestran situaciones en cálculo que requieren la capacidad para trabajar con expresiones fraccionarias.

**EJEMPLO 7** | Simplificación de una fracción compuesta

$$\text{Simplifique: } \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$$

**SOLUCIÓN** Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} &= \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} && \text{Combine fracciones del numerador} \\ &= \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} && \text{Propiedad 2 de fracciones (invierta divisor y multiplicar)} \\ &= \frac{a - a - h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} && \text{Simplifique} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)} && \text{Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)} \end{aligned}$$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69

**EJEMPLO 8** | Simplificación de una fracción compuesta

$$\text{Simplifique: } \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$$

**SOLUCIÓN 1** Factorice  $(1+x^2)^{-1/2}$  del numerador.

$$\begin{aligned} \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} &= \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2) - x^2]}{1+x^2} \\ &= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Factorice la potencia de  $1+x^2$  con el exponente *más pequeño*, en este caso  $(1+x^2)^{-1/2}$ .

**SOLUCIÓN 2** Como  $(1 + x^2)^{-1/2} = 1/(1 + x^2)^{1/2}$  es una fracción, podemos eliminar todas las fracciones al multiplicar numerador y denominador por  $(1 + x^2)^{1/2}$ :

$$\begin{aligned}\frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} &= \frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{(1 + x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{(1 + x^2) - x^2}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 77

## ▼ Racionalización del denominador o el numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma  $A + B\sqrt{C}$ , podemos racionalizar el denominador al multiplicar numerador y denominador por el **radical conjugado**  $A - B\sqrt{C}$ . Esto funciona bien, por la fórmula 1 de productos notables de la Sección 1.3, el producto del denominador y su radical conjugado no contienen radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

### EJEMPLO 9 | Racionalización del denominador

Racionalización del denominador:  $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

**SOLUCIÓN** Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado de  $1 + \sqrt{2}$ , que es  $1 - \sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + \sqrt{2}} &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} && \text{Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2} && \text{Fórmula 1 de productos notables} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 81

### EJEMPLO 10 | Racionalización del numerador

Racionalice el numerador:  $\frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

**SOLUCIÓN** Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado  $\sqrt{4 + h} + 2$ .

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} &= \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4 + h} + 2}{\sqrt{4 + h} + 2} && \text{Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado} \\ &= \frac{(\sqrt{4 + h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} && \text{Fórmula 1 de Productos Notables} \\ &= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2} && \text{Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)}\end{aligned}$$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 87

La Fórmula 1 de Productos Notables es  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

La Fórmula 1 de Productos Notables es  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

## ▼ Evitar errores comunes



No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta razón. La tabla siguiente indica varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 = a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{a + b}{a} = b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} = (a + b)^{-1}$

Para verificar que las ecuaciones de la columna derecha están en error, simplemente sustituya los números  $a$  y  $b$  y calcule cada lado. Por ejemplo, si tomamos  $a = 2$  y  $b = 2$  en el cuarto error, encontramos que el lado izquierdo es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

mientras que el lado derecho es

$$\frac{1}{a + b} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Como  $1 \neq \frac{1}{4}$ , la ecuación indicada está en error. Del mismo modo, el lector debe convenirse del error en cada una de las otras ecuaciones. (Vea Ejercicio 105.)

## 1.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. De lo siguiente, ¿cuáles son expresiones racionales?

(a)  $\frac{3x}{x^2 - 1}$       (b)  $\frac{\sqrt{x+1}}{2x+3}$       (c)  $\frac{x(x^2 - 1)}{x+3}$

2. Para simplificar una expresión racional, cancelamos *factores* que son comunes al \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_. Por tanto, la expresión

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+2)}$$

se simplifica a \_\_\_\_\_.

3. Para multiplicar dos expresiones racionales, multiplicamos sus \_\_\_\_\_ y multiplicamos sus \_\_\_\_\_. Por

tanto,  $\frac{2}{x+1} \cdot \frac{x}{x+3}$  es lo mismo que \_\_\_\_\_.

4. Considere la expresión  $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}$ .

(a) ¿Cuántos términos tiene esta expresión?

(b) Encuentre el mínimo común denominador de todos los términos.

(c) Ejecute la adición y simplifique.

### HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre el dominio de la expresión.

5.  $4x^2 - 10x + 3$

6.  $-x^4 + x^3 + 9x$

7.  $\frac{2x+1}{x-4}$

8.  $\frac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

9.  $\sqrt{x+3}$

10.  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

11.  $\frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$

12.  $\frac{\sqrt{2x}}{x+1}$

13-22 ■ Simplifique la expresión racional.

13. 
$$\frac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$$

14. 
$$\frac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$$

15. 
$$\frac{x-2}{x^2-4}$$

16. 
$$\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$$

17. 
$$\frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$$

18. 
$$\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$$

19. 
$$\frac{y^2+y}{y^2-1}$$

20. 
$$\frac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$$

21. 
$$\frac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$$

22. 
$$\frac{1-x^2}{x^3-1}$$

23-38 ■ Ejecute la multiplicación o división y simplifique.

23. 
$$\frac{4x}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{16x}$$

24. 
$$\frac{x^2-25}{x^2-16} \cdot \frac{x+4}{x+5}$$

25. 
$$\frac{x^2-2x-15}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-5}$$

26. 
$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \cdot \frac{3-x}{3+x}$$

27. 
$$\frac{t-3}{t^2+9} \cdot \frac{t+3}{t^2-9}$$

28. 
$$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$$

29. 
$$\frac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$$

30. 
$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$$

31. 
$$\frac{x+3}{4x^2-9} \div \frac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$$

32. 
$$\frac{2x+1}{2x^2+x-15} \div \frac{6x^2-x-2}{x+3}$$

33. 
$$\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15} \div \frac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$$

34. 
$$\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18} \div \frac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$$

35. 
$$\frac{\frac{x^3}{x+1}}{\frac{x}{x^2+2x+1}}$$

36. 
$$\frac{\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\frac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$$

37. 
$$\frac{x/y}{z}$$

38. 
$$\frac{x}{y/z}$$

39-58 ■ Ejecute la adición o sustracción y simplifique.

39. 
$$2 + \frac{x}{x+3}$$

40. 
$$\frac{2x-1}{x+4} - 1$$

41. 
$$\frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-3}$$

42. 
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

43. 
$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

44. 
$$\frac{x}{x-4} - \frac{3}{x+6}$$

45. 
$$\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$$

46. 
$$\frac{5}{2x-3} - \frac{3}{(2x-3)^2}$$

47. 
$$u + 1 + \frac{u}{u+1}$$

48. 
$$\frac{2}{a^2} - \frac{3}{ab} + \frac{4}{b^2}$$

49. 
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$$

50. 
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

51. 
$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x^2+7x+12}$$

52. 
$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2}$$

53. 
$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$$

54. 
$$\frac{x}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-5x+4}$$

55. 
$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x^2-x}$$

56. 
$$\frac{x}{x^2-x-6} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3}$$

57. 
$$\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^2-2x-3}$$

58. 
$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x^2-1}$$

59-68 ■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

59. 
$$\frac{x + \frac{1}{x+2}}{x - \frac{1}{x+2}}$$

60. 
$$\frac{1 + \frac{1}{c-1}}{1 - \frac{1}{c-1}}$$

61. 
$$\frac{\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-3}{x-2}}{x+2}$$

62. 
$$\frac{\frac{x-3}{x-4} - \frac{x+2}{x+1}}{x+3}$$

63. 
$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$$

64. 
$$x - \frac{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}}{y}$$

65. 
$$\frac{\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}}{x^{-1}+y^{-1}}$$

66. 
$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$$

67. 
$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

68. 
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

69-74 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas aparecen en cálculo.)

69. 
$$\frac{\frac{1}{1+x+h} - \frac{1}{1+x}}{h}$$

70. 
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

71. 
$$\frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

72. 
$$\frac{(x+h)^3 - 7(x+h) - (x^3 - 7x)}{h}$$

73. 
$$\sqrt{1 + \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2}$$

74. 
$$\sqrt{1 + \left( x^3 - \frac{1}{4x^3} \right)^2}$$

75-80 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la “regla del cociente”.)

75. 
$$\frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - (x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$$

76. 
$$\frac{2x(x+6)^4 - x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$$

77. 
$$\frac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$$

78. 
$$\frac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$$

79. 
$$\frac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$$

80. 
$$\frac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$$

81-86 ■ Racionalice el denominador.

81. 
$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

82. 
$$\frac{2}{3-\sqrt{5}}$$

83. 
$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$$

84. 
$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

85. 
$$\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$$

86. 
$$\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

87-92 ■ Racionalice el numerador.

87. 
$$\frac{1-\sqrt{5}}{3}$$

88. 
$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$$

89. 
$$\frac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$$

90. 
$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$$

91. 
$$\sqrt{x^2+1}-x$$

92. 
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

93-100 ■ Diga si la ecuación dada es verdadera para todos los valores de las variables. (No considere ningún valor que haga que el denominador sea cero.)

93. 
$$\frac{16+a}{16} = 1 + \frac{a}{16}$$

94. 
$$\frac{b}{b-c} = 1 - \frac{b}{c}$$

95. 
$$\frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$$

96. 
$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y}$$

97. 
$$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$$

98. 
$$2\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a}{2b}$$

99. 
$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

100. 
$$\frac{1+x+x^2}{x} = \frac{1}{x} + 1 + x$$

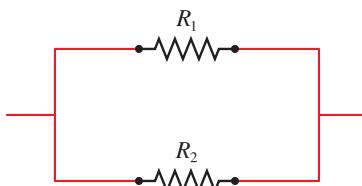
## APLICACIONES

101. **Resistencia eléctrica** Si dos resistores eléctricos con resistencias  $R_1$  y  $R_2$  se conectan en paralelo (vea la figura), entonces la resistencia total  $R$  está dada por

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

(a) Simplifique  $R$  de la expresión.

(b) Si  $R_1 = 10$  ohms y  $R_2 = 20$  ohms, ¿cuál es la resistencia  $R$  total?



102. **Costo promedio** Un fabricante de ropa encuentra que el costo de producir  $x$  camisas es  $500 + 6x + 0.01x^2$  dólares.

(a) Explique por qué el costo promedio por camisa está dado por la expresión racional

$$A = \frac{500 + 6x + 0.01x^2}{x}$$

(b) Complete la tabla al calcular el costo promedio por camisa para los valores dados de  $x$ .

$x$	Costo promedio
10	
20	
50	
100	
200	
500	
1000	

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

103. **Comportamiento límite de una expresión racional** La expresión racional

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

no está definida para  $x = 3$ . Complete las tablas y determine a cuál valor se aproxima la expresión cuando  $x$  se acerca más y más a 3. ¿Por qué es esto razonable? Factorice el numerador de la expresión y simplifique para ver por qué.

$x$	$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$
2.80	
2.90	
2.95	
2.99	
2.999	

$x$	$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$
3.20	
3.10	
3.05	
3.01	
3.001	

104. **¿Es esto racionalización?** En la expresión  $2/\sqrt{x}$  eliminarnos el radical si fuéramos a elevar al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Esto es lo mismo que racionalizar el denominador?

105. **Errores algebraicos** La columna de la izquierda en la tabla de la página siguiente es una lista de algunos errores algebraicos comunes. En cada caso, dé un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este tipo, que muestra que un enunciado es falso, se llama *contraejemplo*.

Error algebraico	Contraejemplo
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$	
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	
$\frac{a+b}{a} \neq b$	
$(a^3 + b^3)^{1/3} \neq a + b$	
$a^m/a^n \neq a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \neq \frac{1}{a^n}$	

**106. La forma de una expresión algebraica** Una expresión algebraica puede parecer complicada, pero su “forma” siempre es fácil; debe ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1 + x^2)^2 + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \quad (1+x)\left(1 + \frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5-x^3}{1+\sqrt{1+x^2}} \quad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Con elecciones apropiadas para  $A$  y  $B$ , la primera tiene la forma  $A + B$ , la segunda  $AB$ , la tercera  $A/B$  y la cuarta  $A^{1/2}$ . Reconociendo la forma de una expresión nos ayuda a expandirla, simplificarla o factorizarla correctamente. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

- (a)  $x + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$       (b)  $(1 + x^2)(1 + x)^3$   
 (c)  $\sqrt[3]{x^4(4x^2 + 1)}$       (d)  $\frac{1 - 2\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1+x^2}}$

## 1.5 ECUACIONES

**Solución de ecuaciones lineales** ► **Solución de ecuaciones cuadráticas** ►  
**Otros tipos de ecuaciones**

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

la letra  $x$  es la variable. Consideramos  $x$  como la “incógnita” de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de  $x$  que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación**.

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo “igual”. A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades,  $A$ ,  $B$  y  $C$  representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo  $\Leftrightarrow$  significa “es equivalente a”.)

### PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

#### Propiedad

1.  $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$

2.  $A = B \Leftrightarrow CA = CB \quad (C \neq 0)$

#### Descripción

Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.

Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos “*sume -7*” al resolver una ecuación, es una forma breve de decir “*sume -7 a cada lado de la ecuación*”.

## ▼ Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

### ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales y  $x$  es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

#### Ecuaciones lineales

$$4x - 5 = 3$$

$$2x = \frac{1}{2}x - 7$$

$$x - 6 = \frac{x}{3}$$

#### Ecuaciones no lineales

$$x^2 + 2x = 8$$

$$\sqrt{x} - 6x = 0$$

$$\frac{3}{x} - 2x = 1$$

No lineal; contiene el cuadrado de la variable

No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable

No lineal; contiene el recíproco de la variable

### EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación  $7x - 4 = 3x + 8$ .

**SOLUCIÓN** Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable  $x$  en un lado y todos los términos constante en el otro.

$$7x - 4 = 3x + 8$$

Ecuación dada

$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$$

Sume 4

$$7x = 3x + 12$$

Simplifique

$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$$

Reste 3x

$$4x = 12$$

Simplifique

$$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$$

Multiplique por  $\frac{1}{4}$

$$x = 3$$

Simplifique

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$\begin{aligned} \text{LI} &= 7(3) - 4 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LD} &= 3(3) + 8 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad \checkmark$$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

Debido a que es importante **VERIFICAR SU RESPUESTA**, hacemos esto en muchos de nuestros ejemplos. En estas pruebas, LI quiere decir “lado izquierdo” y LD es “lado derecho” de la ecuación original.

En las ciencias, muchas fórmulas involucran varias variables, por lo que es necesario expresar una en términos de otras. En el siguiente ejemplo, resolvemos la ley gravitacional de Newton para una variable.

Ésta es la Ley de Newton de Gravitación Universal. Da la fuerza gravitacional  $F$  entre dos masas  $m$  y  $M$  que están a una distancia  $r$  entre sí. La constante  $G$  es la constante universal de gravitación.

### EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras

Despeje  $M$  de la ecuación siguiente.

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar  $M$  en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

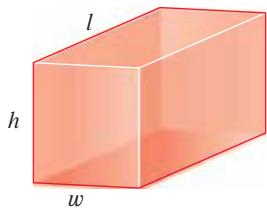
$$F = \left( \frac{Gm}{r^2} \right) M \quad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left( \frac{r^2}{Gm} \right) F = \left( \frac{r^2}{Gm} \right) \left( \frac{Gm}{r^2} \right) M \quad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2 F}{Gm} = M \quad \text{Simplifique}$$

La solución es  $M = \frac{r^2 F}{Gm}$ .

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29



**FIGURA 1** Una caja rectangular cerrada

### EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras

El área superficial  $A$  del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud  $l$ , el ancho  $w$  y la altura  $h$  de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje  $w$  en términos de las otras variables de esta ecuación.

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar  $w$  en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \quad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \quad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \quad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \quad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es  $w = \frac{A - 2lh}{2l + 2h}$ .

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

### ▼ Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como  $2x + 1 = 5$  o  $4 - 3x = 2$ . Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como  $x^2 + 2x - 3 = 0$  o  $2x^2 + 3 = 5x$ .

#### Ecuaciones cuadráticas

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$3x + 10 = 4x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$$

#### ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales con  $a \neq 0$ .

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

### PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. **Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.**

### EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación  $x^2 + 5x = 24$ .

**SOLUCIÓN** Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \quad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \quad \text{Factorice}$$

#### VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$ :

$$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24 \quad \checkmark$$

$x = -8$ :

$$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24 \quad \checkmark$$

Las soluciones son  $x = 3$  y  $x = -8$ .

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \quad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = 3 \quad x = -8 \quad \text{Resuelva}$$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 43

¿Ve usted por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el Ejemplo 4? Factorizar la ecuación como  $x(x + 5) = 24$  no nos ayuda a encontrar soluciones, porque 24 se puede factorizar en un número infinito de formas, por ejemplo  $6 \cdot 4, \frac{1}{2} \cdot 48, (-\frac{2}{5}) \cdot (-60)$ , etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma  $x^2 - c = 0$ , donde  $c$  es una constante positiva, se factoriza como  $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$ , de modo que las soluciones son  $x = \sqrt{c}$  y  $x = -\sqrt{c}$ . Con frecuencia abreviamos esto como  $x = \pm\sqrt{c}$ .

### SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación  $x^2 = c$  son  $x = \sqrt{c}$  y  $x = -\sqrt{c}$ .

### EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a)  $x^2 = 5$       (b)  $(x - 4)^2 = 5$

#### SOLUCIÓN

- (a) Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos  $x = \pm\sqrt{5}$ .  
 (b) También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \quad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \quad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son  $x = 4 + \sqrt{5}$  y  $x = 4 - \sqrt{5}$ .

### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 51 Y 53

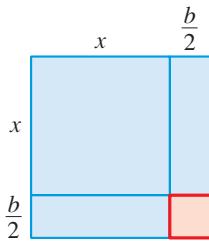
En la página 30 vea cómo reconocer cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

### Completar el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un pequeño cuadrado de área  $(b/2)^2$  para “completar” el cuadrado.



### COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que  $x^2 + bx$  sea un cuadrado perfecto, sume  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ , que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de  $x$ . Esto da el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

### EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

(a)  $x^2 - 8x + 13 = 0$       (b)  $3x^2 - 12x + 6 = 0$

#### SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$	Ecuación dada
$x^2 - 8x = -13$	Reste 13
$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$	Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$
$(x - 4)^2 = 3$	Cuadrado perfecto
$x - 4 = \pm\sqrt{3}$	Tome la raíz cuadrada
$x = 4 \pm \sqrt{3}$	Sume 4

(b) Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de  $x^2$  (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$3x^2 - 12x + 6 = 0$	Ecuación dada
$3x^2 - 12x = -6$	Reste 6
$3(x^2 - 4x) = -6$	Factorice 3 del lado izquierdo

Ahora completamos el cuadrado al sumar  $(-2)^2 = 4$  dentro de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando  $3 \cdot 4 = 12$  al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4$	Complete el cuadrado: sume 4
$3(x - 2)^2 = 6$	Cuadrado perfecto
$(x - 2)^2 = 2$	Divida entre 3
$x - 2 = \pm\sqrt{2}$	Tome la raíz cuadrada
$x = 2 \pm \sqrt{2}$	Sume 2





Library of Congress

**FRANÇOIS VIÈTE** (1540-1603) tuvo una exitosa carrera política antes de dedicarse a las matemáticas en los últimos años de su vida. Fue uno de los más afamados matemáticos franceses del siglo xvi. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra al usar letras para representar cantidades *conocidas* en una ecuación. Antes de la época de Viète, cada ecuación tenía que ser resuelta por sí misma. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

tenían que ser resueltas por separado completando el cuadrado. La idea de Viète era considerar todas las ecuaciones cuadráticas a la vez escribiendo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  eran cantidades conocidas. De este modo, él hizo posible escribir una *fórmula* (en este caso, la fórmula cuadrática) con  $a$ ,  $b$  y  $c$  que pueden usarse para resolver todas esas ecuaciones en un solo golpe.

El genio matemático de Viète resultó ser sumamente valioso durante una guerra entre Francia y España. Para comunicarse con sus tropas, los españoles utilizaban un complicado código que Viète se arregló para descifrarlo. Sin saber el logro de Viète, el rey español Felipe II protestó ante el Papa, diciendo que los franceses estaban usando brujería para leer los mensajes de los españoles.

#### Otro método

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$(2x + 3)^2 = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general  $ax^2 + bx + c = 0$ .

### LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a \neq 0$ , son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**DEMOSTRACIÓN** Primero, dividimos entre  $a$  cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar  $(b/2a)^2$  a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Complete el cuadrado: sume  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

Cuadrado perfecto

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tome la raíz cuadrada

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

La fórmula cuadrática podría usarse para resolver las ecuaciones de los Ejemplos 4 y 6. El lector debe realizar los detalles de estos cálculos.

### EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a)  $3x^2 - 5x - 1 = 0$       (b)  $4x^2 + 12x + 9 = 0$       (c)  $x^2 + 2x + 2 = 0$

#### SOLUCIÓN

(a) En esta ecuación cuadrática  $a = 3$ ,  $b = -5$  y  $c = -1$ .

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

$b = -5$   
 $a = 3$        $c = -1$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \quad \text{y} \quad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) Usando la fórmula cuadrática con  $a = 4$ ,  $b = 12$  y  $c = 9$  dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución,  $x = -\frac{3}{2}$ .

- (c) Usando la fórmula cuadrática, con  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = 2$  resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo,  $\sqrt{-1}$  no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 65, 69 Y 75** 

En la Sección 3.5 estudiamos el sistema de números complejos, en el que existen las raíces cuadradas de números negativos. La ecuación del Ejemplo 7(c) tiene soluciones en el sistema de números complejos.

La cantidad  $b^2 - 4ac$  que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante de la ecuación*  $ax^2 + bx + c = 0$  y está dada por el símbolo  $D$ . Si  $D < 0$ , entonces  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el Ejemplo 7(c). Si  $D = 0$ , entonces la ecuación tiene sólo una solución real, como en el Ejemplo 7(b). Por último, si  $D > 0$ , entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el Ejemplo 7(a). El recuadro siguiente resume estas observaciones.

**EL DISCRIMINANTE**

El **discriminante** de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) es  $D = b^2 - 4ac$ .

1. Si  $D > 0$ , entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si  $D = 0$ , entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si  $D < 0$ , entonces la ecuación no tiene solución real.

**EJEMPLO 8 | Uso del discriminante**

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

(a)  $x^2 + 4x - 1 = 0$       (b)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$       (c)  $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

**SOLUCIÓN**

- (a) El discriminante es  $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$ , por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- (b) El discriminante es  $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$ , por lo cual la ecuación tiene una solución real.
- (c) El discriminante es  $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$ , por lo cual la ecuación no tiene solución real.

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 79, 81 Y 83** 

A continuación consideraremos una situación real que puede ser modelada por una ecuación cuadrática.

**EJEMPLO 9 | Trayectoria de un proyectil**

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial  $v_0$  pies/s alcanzará una altura de  $h$  pies después de  $t$  segundos, donde  $h$  y  $t$  están relacionadas por la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0t$$

Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se ilustra en la Figura 2.

- (a) ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?
- (b) ¿Cuándo alcanza una altura de 6400 pies?

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración debida a la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. Aquí despreciamos el efecto de la resistencia del aire.

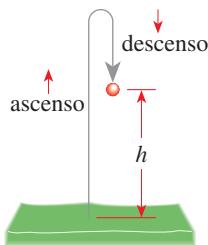
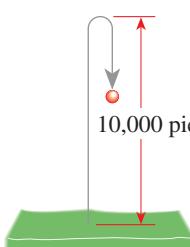
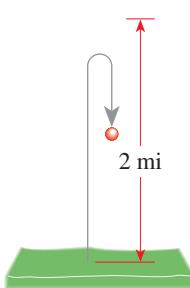
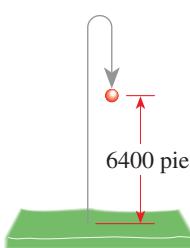
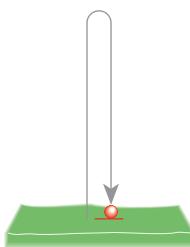


FIGURA 2



(c) ¿Cuándo alcanza una altura de 2 millas?

(d) ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?

**SOLUCIÓN** Como la velocidad inicial en este caso es  $v_0 = 800$  pies/s, la fórmula es

$$h = -16t^2 + 800t$$

(a) El nivel del suelo corresponde a  $h = 0$ , de modo que debemos resolver la ecuación

$$0 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga } h = 0$$

$$0 = -16t(t - 50) \quad \text{Factorice}$$

Por lo tanto,  $t = 0$  o  $t = 50$ . Esto significa que la bala arranca ( $t = 0$ ) al nivel del suelo y regresa a éste después de 50 segundos.

(b) Haciendo  $h = 6400$  da la ecuación

$$6400 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga } h = 6400$$

$$16t^2 - 800t + 6400 = 0 \quad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$

$$t^2 - 50t + 400 = 0 \quad \text{Divida entre 16}$$

$$(t - 10)(t - 40) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$t = 10 \quad \text{or} \quad t = 40 \quad \text{Resuelva}$$

La bala llega a 6400 pies después de 10 s (en su ascenso) y otra vez después de 40 s (en su descenso a tierra).

(c) Dos millas es  $2 \times 5280 = 10,560$  pies.

$$10,560 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga } h = 10,560$$

$$16t^2 - 800t + 10,560 = 0 \quad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$

$$t^2 - 50t + 660 = 0 \quad \text{Divida entre 16}$$

El discriminante de esta ecuación es  $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$ , que es negativo. Entonces, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca llega a una altura de 2 millas.

(d) Cada altura a la que llega la bala es alcanzada dos veces, una vez en su ascenso y una vez en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que se alcanza una sola vez. Esto significa que para el valor más alto de  $h$ , la siguiente ecuación tiene sólo una solución para  $t$ :

$$h = -16t^2 + 800t$$

$$16t^2 - 800t + h = 0 \quad \text{Alterne al lado izquierdo}$$

Esto a su vez significa que el discriminante  $D$  de la ecuación es 0, de modo que

$$D = (-800)^2 - 4(16)h = 0$$

$$640,000 - 64h = 0$$

$$h = 10,000$$

La máxima altura alcanzada es 10,000 pies.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 111**

## ▼ Otros tipos de ecuaciones

Hasta aquí hemos aprendido a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. A continuación estudiaremos otros tipos de ecuaciones, incluyendo las que contienen potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

### EJEMPLO 10 | Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación  $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$ .

#### VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$ :

$$\begin{aligned} \text{LI} &= \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$\text{LD} = 2$

$\text{LI} = \text{LD}$  ✓

$x = -1$ :

$$\begin{aligned} \text{LI} &= \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} \\ &= -3 + 5 = 2 \end{aligned}$$

$\text{LD} = 2$

$\text{LI} = \text{LD}$  ✓

**SOLUCIÓN** Eliminamos los denominadores al multiplicar cada lado por el mínimo común denominador.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2}\right)x(x+2) &= 2x(x+2) && \text{Multiplique por el MCD } x(x+2) \\ 3(x+2) + 5x &= 2x^2 + 4x && \text{Expanda} \\ 8x + 6 &= 2x^2 + 4x && \text{Expanda el lado izquierdo} \\ 0 &= 2x^2 - 4x - 6 && \text{Reste } 8x + 6 \\ 0 &= x^2 - 2x - 3 && \text{Divida entre 2 ambos lados} \\ 0 &= (x-3)(x+1) && \text{Factorice} \\ x-3=0 & \quad \text{o} \quad x+1=0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \\ x=3 & & x=-1 & \text{Resuelva} \end{aligned}$$

Debemos verificar nuestras respuestas porque multiplicar por una expresión que contenga la variable puede introducir soluciones extrañas. De *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones son  $x = 3$  y  $-1$ .

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 85

#### VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned} \text{LI} &= 2\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \\ \text{LD} &= 1 - \sqrt{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\text{LI} = \text{LD}$  ✓

$x = 1$ :

$$\begin{aligned} \text{LI} &= 2(1) = 2 \\ \text{LD} &= 1 - \sqrt{2 - 1} \\ &= 1 - 1 = 0 \\ \text{LI} &\neq \text{LD} \quad \times \end{aligned}$$

### EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación  $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ .

**SOLUCIÓN** Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= -\sqrt{2-x} && \text{Reste 1} \\ (2x-1)^2 &= 2-x && \text{Eleve al cuadrado cada lado} \\ 4x^2 - 4x + 1 &= 2-x && \text{Expanda el lado izquierdo} \\ 4x^2 - 3x - 1 &= 0 && \text{Sume } -2+x \\ (4x+1)(x-1) &= 0 && \text{Factorice} \\ 4x+1=0 & \quad \text{o} \quad x-1=0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \\ x=-\frac{1}{4} & & x=1 & \text{Resuelva} \end{aligned}$$

Los valores  $x = -\frac{1}{4}$  y  $x = 1$  son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que  $x = -\frac{1}{4}$  es una solución pero  $x = 1$  no lo es. La única solución es  $x = -\frac{1}{4}$ .

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 91

Cuando resolvamos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas**, es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original. En el Ejemplo 11 el valor  $x = 1$  es una solución extraña. Las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo  $-1 \neq 1$ , pero  $(-1)^2 = 1^2$ . Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más

valores de la variable que la ecuación original. **Ésta es la razón por la que siempre deben verificarse las respuestas para asegurarse que cada una de ellas satisfaga la ecuación original.**

Una ecuación de la forma  $aW^2 + bW + c = 0$ , donde  $W$  es una expresión algebraica, es una ecuación de **tipo cuadrático**. Resolvemos ecuaciones de tipo cuadrático al sustituir por la expresión algebraica, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

### EJEMPLO 12 | Una ecuación de cuarto grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación  $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ .

**SOLUCIÓN** Si hacemos  $W = x^2$ , entonces obtenemos una ecuación cuadrática con la nueva variable  $W$ :

$$\begin{aligned} (x^2)^2 - 8x^2 + 8 &= 0 && \text{Escriba } x^4 \text{ como } (x^2)^2 \\ W^2 - 8W + 8 &= 0 && \text{Sea } W = x^2 \\ W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} &= 4 \pm 2\sqrt{2} && \text{Fórmula cuadrática} \\ x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} & && W = x^2 \\ x = \pm \sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} & && \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usando una calculadora, obtenemos las aproximaciones  $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$ .

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 95

### EJEMPLO 13 | Una ecuación con potencias fraccionarias

Encuentre todas las soluciones de la ecuación  $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$ .

**SOLUCIÓN** Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos  $W = x^{1/6}$ , entonces  $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$ .

$$\begin{aligned} x^{1/3} + x^{1/6} - 2 &= 0 \\ W^2 + W - 2 &= 0 && \text{Sea } W = x^{1/6} \\ (W - 1)(W + 2) &= 0 && \text{Factorice} \\ W - 1 = 0 & \quad \text{o} \quad W + 2 = 0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \\ W = 1 & \quad \quad \quad W = -2 && \text{Resuelva} \\ x^{1/6} = 1 & \quad \quad \quad x^{1/6} = -2 && W = x^{1/6} \\ x = 1^6 = 1 & \quad \quad \quad x = (-2)^6 = 64 && \text{Tome la 6a. potencia} \end{aligned}$$

De *Verifique sus respuestas* vemos que  $x = 1$  es una solución pero  $x = 64$  no lo es. La solución es  $x = 1$ .

#### VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$$\begin{array}{ll} x = 1: & x = 64: \\ \text{LI} = 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0 & \text{LI} = 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2 \\ & = 4 + 2 - 2 = 4 \\ \text{LD} = 0 & \text{LD} = 0 \\ \text{LI} = \text{LD} & \text{LI} \neq \text{LD} \end{array}$$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 99

Al resolver ecuaciones que contengan valores absolutos, por lo general tomamos casos.

### EJEMPLO 14 | Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación  $|2x - 5| = 3$ .

**SOLUCIÓN** Por la definición de valor absoluto,  $|2x - 5| = 3$  es equivalente a

$$\begin{array}{ll} 2x - 5 = 3 & \text{o} \\ 2x = 8 & \\ x = 4 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2x - 5 = -3 & \\ 2x = 2 & \\ x = 1 & \end{array}$$

Las soluciones son  $x = 1$ ,  $x = 4$ .

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 105

## 1.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. ¿Verdadero o falso?

- (a) Sumar el mismo número a cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.
  - (b) Multiplicar cada lado de una ecuación por el mismo número siempre da una ecuación equivalente.
  - (c) Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.
2. Explique cómo usaría cada método para resolver la ecuación  $x^2 - 4x - 5 = 0$ .

(a) Por factorización: \_\_\_\_\_

(b) Completando el cuadrado: \_\_\_\_\_

(c) Usando la fórmula cuadrática: \_\_\_\_\_

3. (a) Las soluciones de la ecuación  $x^2(x - 4) = 0$  son \_\_\_\_\_.

(b) Para resolver la ecuación  $x^3 - 4x^2 = 0$ , \_\_\_\_\_ el lado izquierdo.

4. Resuelva la ecuación  $\sqrt{2x} + x = 0$  con los siguientes pasos.

(a) Aislar el radical: \_\_\_\_\_.

(b) Elevar al cuadrado ambos lados: \_\_\_\_\_.

(c) Las soluciones de la ecuación cuadrática resultante son \_\_\_\_\_.

(d) La(s) solución(es) que satisface la ecuación original es (son) \_\_\_\_\_.

5. La ecuación  $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$  es del tipo \_\_\_\_\_. Para resolver la ecuación, hacemos  $W = \underline{\hspace{2cm}}$ . La ecuación cuadrática resultante es \_\_\_\_\_.

6. La ecuación  $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$  es del tipo \_\_\_\_\_. Para resolver la ecuación, hacemos  $W = \underline{\hspace{2cm}}$ .

La ecuación cuadrática resultante es \_\_\_\_\_.

### HABILIDADES

7-10 ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

7.  $4x + 7 = 9x - 3$

- (a)  $x = -2$     (b)  $x = 2$

8.  $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$

- (a)  $x = 2$     (b)  $x = 4$

9.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 4} = 1$

- (a)  $x = 2$     (b)  $x = 4$     (a)  $x = 4$     (b)  $x = 8$

10.  $\frac{x^{3/2}}{x - 6} = x - 8$

11-28 ■ La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

11.  $2x + 7 = 31$

12.  $5x - 3 = 4$

13.  $\frac{1}{2}x - 8 = 1$

14.  $3 + \frac{1}{3}x = 5$

15.  $-7w = 15 - 2w$

16.  $5t - 13 = 12 - 5t$

17.  $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$

18.  $\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7$

19.  $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

20.  $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y + 1}{4}$

21.  $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

22.  $2x - \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{4} = 6x$

23.  $\frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + 1$

24.  $\frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{4}{5}$

25.  $\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3x + 3}$

26.  $\frac{4}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{35}{x^2 - 1}$

27.  $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$

28.  $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \frac{x + 5}{\sqrt{3}}$

29-42 ■ De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

29.  $PV = nRT$ ; despeje  $R$

30.  $F = G \frac{mM}{r^2}$ ; despeje  $m$

31.  $P = 2l + 2w$ ; despeje  $w$     32.  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ; despeje  $R_1$
33.  $\frac{ax + b}{cx + d} = 2$ ; despeje  $x$
34.  $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$ ; despeje  $x$
35.  $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$ ; despeje  $x$
36.  $\frac{a + 1}{b} = \frac{a - 1}{b} + \frac{b + 1}{a}$ ; despeje  $a$
37.  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ; despeje  $r$     38.  $F = G \frac{mM}{r^2}$ ; despeje  $r$
39.  $a^2 + b^2 = c^2$ ; despeje  $b$
40.  $A = P \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$ ; despeje  $i$
41.  $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ ; despeje  $t$     42.  $S = \frac{n(n + 1)}{2}$ ; despeje  $n$
- 43-54 ■ Resuelva la ecuación por factorización.
43.  $x^2 + x - 12 = 0$     44.  $x^2 + 3x - 4 = 0$
45.  $x^2 - 7x + 12 = 0$     46.  $x^2 + 8x + 12 = 0$
47.  $4x^2 - 4x - 15 = 0$     48.  $2y^2 + 7y + 3 = 0$
49.  $3x^2 + 5x = 2$     50.  $6x(x - 1) = 21 - x$
51.  $2x^2 = 8$     52.  $3x^2 - 27 = 0$
53.  $(3x + 2)^2 = 10$     54.  $(2x - 1)^2 = 8$
- 55-62 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.
55.  $x^2 + 2x - 5 = 0$     56.  $x^2 - 4x + 2 = 0$
57.  $x^2 - 6x - 11 = 0$     58.  $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$
59.  $2x^2 + 8x + 1 = 0$     60.  $3x^2 - 6x - 1 = 0$
61.  $4x^2 - x = 0$     62.  $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$
- 63-78 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.
63.  $x^2 - 2x - 15 = 0$     64.  $x^2 + 5x - 6 = 0$
65.  $x^2 - 7x + 10 = 0$     66.  $x^2 + 30x + 200 = 0$
67.  $2x^2 + x - 3 = 0$     68.  $3x^2 + 7x + 4 = 0$
69.  $3x^2 + 6x - 5 = 0$     70.  $x^2 - 6x + 1 = 0$
71.  $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$     72.  $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$
73.  $4x^2 + 16x - 9 = 0$     74.  $0 = x^2 - 4x + 1$
75.  $w^2 = 3(w - 1)$     76.  $3 + 5z + z^2 = 0$
77.  $10y^2 - 16y + 5 = 0$     78.  $25x^2 + 70x + 49 = 0$
- 79-84 ■ Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.
79.  $x^2 - 6x + 1 = 0$     80.  $3x^2 = 6x - 9$
81.  $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$     82.  $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$
83.  $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$     84.  $x^2 + rx - s = 0$  ( $s > 0$ )
- 85-108 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.
85.  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}$     86.  $\frac{10}{x} - \frac{12}{x-3} + 4 = 0$
87.  $\frac{x^2}{x + 100} = 50$     88.  $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} = 0$
89.  $\frac{x+5}{x-2} = \frac{5}{x+2} + \frac{28}{x^2-4}$     90.  $\frac{x}{2x+7} - \frac{x+1}{x+3} = 1$
91.  $\sqrt{2x+1} + 1 = x$     92.  $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$
93.  $2x + \sqrt{x+1} = 8$     94.  $\sqrt{\sqrt{x-5}+x} = 5$
95.  $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$     96.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
97.  $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$     98.  $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$
99.  $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$     100.  $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$
101.  $4(x+1)^{1/2} - 5(x+1)^{3/2} + (x+1)^{5/2} = 0$
102.  $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$
103.  $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$     104.  $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
105.  $|3x + 5| = 1$     106.  $|2x| = 3$
107.  $|x - 4| = 0.01$     108.  $|x - 6| = -1$

## APLICACIONES

- 109-110 ■ **Problemas de cuerpos en caída** Suponga que un cuerpo se deja caer desde una altura  $h_0$  sobre el suelo. Entonces su altura después de  $t$  segundos está dada por  $h = 16t^2 + h_0$ , donde  $h$  se mide en pies. Use esta información para resolver el problema.
109. Si una pelota se deja caer desde 288 pies sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?
110. Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.
- (a) ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?
- (b) ¿Cuánto tardará en caer el suelo?
- 111-112 ■ **Problemas de cuerpos en caída** Use la fórmula  $h = -16t^2 + v_0t$  que se estudia en el Ejemplo 9.
111. Una pelota se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de  $v_0 = 40$  pies/s.
- (a) ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 pies?
- (b) ¿Cuándo llega a una altura de 48 pies?
- (c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?
- (d) ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?
- (e) ¿Cuándo cae al suelo?
112. ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota para que alcance una altura máxima de 100 pies? [Sugerencia: Use el discriminante de la ecuación  $16t^2 - v_0t + h = 0$ .]
113. **Contracción en vigas de concreto** A medida que el concreto se seca, se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de  $w$  kg/m<sup>3</sup>, entonces se contraerá con un factor
- $$S = \frac{0.032w - 2.5}{10,000}$$
- donde  $S$  es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.
- (a) Una viga de 12.025 m de largo es vaciada en concreto que contiene 250 kg/m<sup>3</sup> de agua. ¿Cuál es el factor de contracción  $S$ ? ¿Qué largo tendrá la viga cuando se haya secado?

- (b) Una viga mide 10.014 m de largo cuando está húmeda. Deseamos que se contraiga a 10.009 m, de modo que el factor de contracción sea  $S = 0.00050$ . ¿Qué contenido de agua dará esta cantidad de contracción?



- 114. La ecuación de lentes** Si  $F$  es la longitud focal de un lente convexo y un objeto se coloca a una distancia  $x$  desde el lente, entonces su imagen estará a una distancia  $y$  del lente, donde  $F$ ,  $x$  y  $y$  están relacionadas por la *ecuación de lentes*

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que un lente tiene una longitud focal de 4.8 cm y que la imagen de un objeto está 4 cm más cerca del lente que el objeto mismo. ¿A qué distancia del lente está el objeto?

- 115. Población de peces** La población de peces de cierto lago sube y baja de acuerdo con la fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2)$$

Aquí  $F$  es el número de peces en el tiempo  $t$ , donde  $t$  se mide en años desde el 1 de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por primera vez.

- (a) ¿En qué fecha la población de peces será otra vez la misma de como era el 1 de enero de 2002?  
 (b) ¿Antes de qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

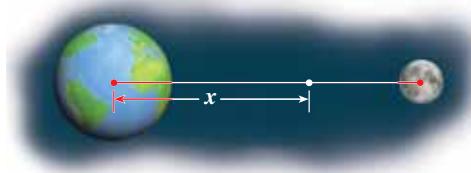
- 116. Población de peces** Un gran estanque es abastecido de peces. La población  $P$  de peces está modelada con la fórmula  $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$ , donde  $t$  es el número de días desde que los peces fueron introducidos en el estanque. ¿Cuántos días tardará la población de peces en llegar a 500?

- 117. Utilidades** Un fabricante de aparatos pequeños encuentra que la utilidad  $P$  (en dólares), generada por producir  $x$  hornos de microondas por semana, está dada por la fórmula  $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$  siempre que  $0 \leq x \leq 200$ . ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana determinada para generar una utilidad de \$1250?

- 118. Gravedad** Si un segmento imaginario de recta se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza  $F$  gravitacional neta que actúa sobre un objeto situado sobre este segmento de recta es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

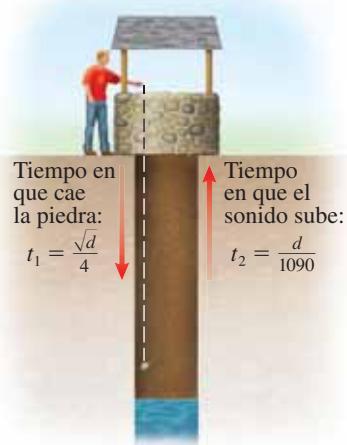
donde  $K > 0$  es una constante y  $x$  es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medida en miles de millas. ¿A qué distancia del centro de la Tierra está el “punto muerto” donde no hay fuerza gravitacional neta que actúe sobre el objeto? (Expresé su respuesta a las mil millas más cercanas.)



- 119. Profundidad de un pozo** Un método para determinar la profundidad de un pozo es dejar caer en él una piedra, y luego medir el tiempo que tarda la caída hasta que se escucha el ruido de la piedra al tocar el agua. Si  $d$  es la profundidad del pozo (en pies) y  $t_1$  es el tiempo (en segundos) que tarda la piedra en caer, entonces  $d = 16t_1^2$ , de modo que  $t_1 = \sqrt{d}/4$ . Ahora, si  $t_2$  es el tiempo que tarda el sonido en regresar, entonces  $d = 1090t_2$  porque la velocidad del sonido es 1090 pies/s. Por lo tanto,  $t_2 = d/1090$ . Así, el tiempo total transcurrido entre dejar caer la piedra y escuchar el ruido cuando cae es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

¿Cuál es la profundidad del pozo si su tiempo total es 3 s?



## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 120. Una familia de ecuaciones** La ecuación

$$3x + k - 5 = kx - k + 1$$

es en realidad una **familia de ecuaciones**, porque para cada valor de  $k$  obtenemos una ecuación diferente con la incógnita  $x$ . La letra  $k$  se llama **parámetro** para esta familia. ¿Qué valor debemos escoger para  $k$  para hacer que el valor determinado de  $x$  sea una solución de la ecuación resultante?

- (a)  $x = 0$       (b)  $x = 1$       (c)  $x = 2$

- 121. ¿Demostración de que  $0 = 1$ ?** Los siguientes pasos parecen dar ecuaciones equivalentes, que parecen demostrar que  $1 = 0$ . Encuentre el error.

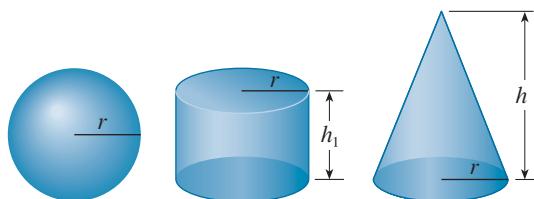
$x = 1$	Dada
$x^2 = x$	Multiplique por $x$
$x^2 - x = 0$	Reste $x$
$x(x - 1) = 0$	Factorice
$\frac{x(x - 1)}{x - 1} = \frac{0}{x - 1}$	Divida entre $x - 1$
$x = 0$	Simplifique
$1 = 0$	Dada $x = 1$

- 122. Volúmenes de sólidos** La esfera, el cilindro y el cono que se ven a continuación tienen todos ellos el mismo radio  $r$  y el mismo volumen  $V$ .

- (a) Use las fórmulas de volumen dadas al final de este libro, para demostrar que

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 \quad \text{y} \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

- (b) De estas ecuaciones despeje  $h_1$  y  $h_2$ .



- 123. Relación entre raíces y coeficientes** La fórmula cuadrática nos da las raíces de una ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes. También podemos obtener los coeficientes a partir de sus raíces. Por ejemplo, encuentre las raíces de la ecuación  $x^2 - 9x + 20 = 0$  y demuestre que el producto de las raíces es el término constante 20 y la suma de las raíces es 9, el nega-

tivo del coeficiente de  $x$ . Demuestre que la misma relación entre raíces y coeficientes se cumple para las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Use la fórmula cuadrática para demostrar que, en general, si la ecuación  $x^2 + bx + c = 0$  tiene raíces  $r_1$  y  $r_2$ , entonces  $c = r_1 r_2$  y  $b = -(r_1 + r_2)$ .

- 124. Resolver una ecuación en formas diferentes** En esta sección hemos aprendido varias formas diferentes de resolver una ecuación. Algunas ecuaciones pueden abordarse en más de un método. Por ejemplo, la ecuación  $x - \sqrt{x} - 2 = 0$  es de tipo cuadrático. Podemos resolverla haciendo  $\sqrt{x} = u$  y  $x = u^2$ , y factorizando. O bien, podríamos despejar  $\sqrt{x}$ , elevar al cuadrado cada lado y luego resolver la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las siguientes ecuaciones usando ambos métodos indicados, y demuestre que obtiene las mismas respuestas finales.

- (a)  $x - \sqrt{x} - 2 = 0$  tipo cuadrático; despeje el radical y eleve al cuadrado

- (b)  $\frac{12}{(x-3)^2} + \frac{10}{x-3} + 1 = 0$  tipo cuadrático; multiplique por el MCD

## 1.6 MODELADO CON ECUACIONES

**Construcción y uso de modelos** ► **Problemas acerca de interés** ► **Problemas de área o longitud** ► **Problemas de mezclas** ► **Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo** ► **Problemas de distancia, rapidez y tiempo**

Numerosos problemas en ciencias, economía, finanzas, medicina y otros muchos campos se pueden convertir en problemas de álgebra; ésta es una razón por la que el álgebra es tan útil. En esta sección usamos ecuaciones como modelos matemáticos para resolver problemas reales.

### ▼ Construcción y uso de modelos

Usaremos las siguientes guías para ayudarnos a formular ecuaciones que modelen situaciones descritas en palabras. Para demostrar la forma en que estas guías pueden ayudar a formular ecuaciones, téngalas en cuenta al trabajar cada ejemplo de esta sección.

#### GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

- 1. Identifique la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide hallar. En general, esta cantidad puede ser determinada por una cuidadosa lectura de la pregunta que se plantea al final del problema. Despues **introduzca notación** para la variable (llámela  $x$  o alguna otra letra).
- 2. Transforme palabras en álgebra.** De nuevo lea cada oración del problema y exprese, en términos de la variable que haya definido en el Paso 1, todas las cantidades mencionadas en el problema. Para organizar esta información, a veces es útil **trazar un diagrama o hacer una tabla**.
- 3. Formule el modelo.** Encuentre el dato de importancia decisiva en el problema, que dé una relación entre las expresiones que haya citado en el Paso 2. **Formule una ecuación** (o **modelo**) que exprese esta relación.
- 4. Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique su respuesta, y exprésela como una oración que conteste la pregunta planteada en el problema.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se usa esta guía para convertir un “problema de palabras” en lenguaje de álgebra.

### EJEMPLO 1 | Rentar un auto

Una compañía de renta de autos cobra \$30 al día y \$0.15 por milla para rentar un auto. Helen renta un auto durante dos días y su cuenta llega a \$108. ¿Cuántas millas recorrió?

#### SOLUCIÓN

**Identifique la variable.** Nos piden hallar el número de millas que Helen ha recorrido. Por tanto, hacemos

$$x = \text{número de millas recorridas}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** Ahora convertimos toda la información dada en el problema a un lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Número de millas recorridas	$x$
Costo del recorrido (a \$0.15 por milla)	$0.15x$
Costo diario (a \$30 por día)	$2(30)$

**Formule el modelo.** Ahora proponemos el modelo.

$$\text{costo del recorrido} + \text{costo diario} = \text{costo total}$$

$$0.15x + 2(30) = 108$$

**Resuelva.** Ahora despejamos  $x$ .

$$0.15x = 48 \quad \text{Reste } 60$$

$$x = \frac{48}{0.15} \quad \text{Divida entre } 0.15$$

$$x = 320 \quad \text{Con calculadora}$$

#### VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$$\begin{aligned} \text{costo total} &= \text{costo del recorrido} + \\ &\quad \text{costo diario} \\ &= 0.15(320) + 2(30) \\ &= 108 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Helen manejó 320 millas su auto rentado.

#### ☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

En los ejemplos y ejercicios que siguen, construimos ecuaciones que modelan problemas en muchas situaciones reales diferentes.

### ▼ Problemas acerca de interés

Cuando usted pide un préstamo en un banco o cuando un banco le “pide prestado” a usted al mantener el dinero en una cuenta de ahorros, quien pide el préstamo en este caso debe pagar por el privilegio de usar el dinero. La cuota que se paga se llama **interés**. El tipo más básico de interés es el **interés simple**, que es precisamente un porcentaje anual de la cantidad total solicitada en préstamo o depositada. La cantidad de un préstamo o depósito se llama **principal  $P$** . El porcentaje anual pagado por el uso de este dinero es la **tasa de interés  $r$** . Usaremos la variable  $t$  para representar el número de años que el dinero está en depósito y la variable  $I$  para representar el interés total ganado. La siguiente **fórmula de interés simple** da la cantidad de interés  $I$  ganado cuando un principal  $P$  es depositado durante  $t$  años a una tasa de interés  $r$ .

$$I = Prt$$

🚫 Cuando use esta fórmula, recuerde convertir el porcentaje  $r$  a decimal. Por ejemplo, en forma decimal, 5% es 0.05. Entonces, a una tasa de interés de 5%, el interés pagado sobre un depósito de \$1000 en un período de 3 años es  $I = Prt = 1000(0.05)(3) = \$150$ .

### EJEMPLO 2 | Interés sobre una inversión

María hereda \$100,000 y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga 6% y el otro paga  $4\frac{1}{2}\%$  de interés simple al año. Si el interés total de María es \$5025 al año, ¿cuánto dinero se invierte a cada una de las tasas de interés?

#### SOLUCIÓN

**Identifique la variable.** El problema pide la cantidad que ella ha invertido a cada una de las tasas. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{la cantidad invertida al 6\%}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** Como la herencia total que recibió María es \$100,000, se deduce que ella invirtió  $100,000 - x$  al  $4\frac{1}{2}\%$ . Convertimos toda la información dada en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Cantidad invertida al 6%	$x$
Cantidad invertida al $4\frac{1}{2}\%$	$100,000 - x$
Cantidad ganada al 6%	$0.06x$
Cantidad ganada al $4\frac{1}{2}\%$	$0.045(100,000 - x)$

**Formule el modelo.** Usamos el dato de que el interés total de María es \$5025 para proponer el modelo.

$$\text{interés al 6\%} + \text{interés al } 4\frac{1}{2}\% = \text{interés total}$$

$$0.06x + 0.045(100,000 - x) = 5025$$

**Resuelva.** A continuación despeje la  $x$ .

$$0.06x + 4500 - 0.045x = 5025 \quad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$0.015x + 4500 = 5025 \quad \text{Combine términos en } x$$

$$0.015x = 525 \quad \text{Reste 4500}$$

$$x = \frac{525}{0.015} = 35,000 \quad \text{Divida entre 0.015}$$

Entonces María ha invertido \$35,000 al 6% y los restantes \$65,000 al  $4\frac{1}{2}\%$ .

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

$$\begin{aligned} \text{interés total} &= 6\% \text{ de } \$35,000 + 4\frac{1}{2}\% \text{ de } \$65,000 \\ &= \$2100 + \$2925 = \$5025 \quad \checkmark \end{aligned}$$

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

### ▼ Problemas de área o longitud

Cuando usamos álgebra para modelar una situación física, a veces debemos usar fórmulas básicas de geometría. Por ejemplo, es posible que necesitemos una fórmula para un área o un perímetro, o la fórmula que relaciona los lados de triángulos semejantes, o el Teorema de Pitágoras. Casi todas estas fórmulas aparecen al final de este libro. Los dos ejemplos que siguen usan estas fórmulas geométricas para resolver algunos problemas prácticos.

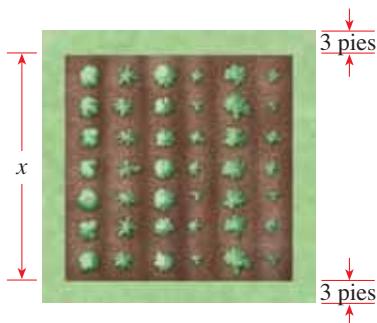


FIGURA 1

**EJEMPLO 3** | Dimensiones de un jardín

Un jardín cuadrado tiene un andador de 3 pies de ancho alrededor de su borde exterior, como se ve en la Figura 1. Si el área de todo el jardín, incluyendo los andadores, es de 18,000 pies<sup>2</sup>, ¿cuáles son las dimensiones del área plantada?

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** Nos piden hallar la longitud y ancho del área plantada. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{longitud del área plantada}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** A continuación, convierta la información de la Figura 1 en el lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Longitud del área plantada	$x$
Longitud de todo el jardín	$x + 6$
Área de todo el jardín	$(x + 6)^2$

**Formule el modelo.** A continuación proponemos el modelo.

$$\text{área de todo el jardín} = 18,000 \text{ pies}^2$$

$$(x + 6)^2 = 18,000$$

**Resuelva.** A continuación despejamos  $x$ .

$$\begin{aligned} x + 6 &= \sqrt{18,000} && \text{Tome raíces cuadradas} \\ x &= \sqrt{18,000} - 6 && \text{Reste 6} \\ x &\approx 128 \end{aligned}$$

El área plantada del jardín es de unos 128 pies por 128 pies.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 47**
**EJEMPLO 4** | Dimensiones de un lote para construcción

Un lote rectangular para construcción mide 8 pies más largo de lo que es de ancho y tiene un área de 2900 pies<sup>2</sup>. Encuentre las dimensiones del lote.

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** Nos piden hallar el ancho y largo del lote. Entonces, hacemos

$$w = \text{ancho del lote}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** A continuación convertimos la información dada en el problema en el lenguaje de álgebra (vea Figura 2).

En palabras	En álgebra
Ancho del lote	$w$
Longitud del lote	$w + 8$

**Formule el modelo.** Ahora formulamos el modelo

$$\begin{array}{c} \text{ancho} \quad \cdot \quad \text{longitud} \quad = \quad \text{área} \\ \text{del lote} \quad \quad \text{del lote} \quad \quad \text{del lote} \\ w(w + 8) = 2900 \end{array}$$

**Resuelva.** A continuación despejamos  $w$ .

$$\begin{array}{ll}
 w^2 + 8w = 2900 & \text{Expanda} \\
 w^2 + 8w - 2900 = 0 & \text{Reste 2900} \\
 (w - 50)(w + 58) = 0 & \text{Factorice} \\
 w = 50 \quad \text{or} \quad w = -58 & \text{Propiedad de producto cero}
 \end{array}$$

Como el ancho del lote debe ser un número positivo, concluimos que  $w = 50$  pies. La longitud del lote es  $w + 8 = 50 + 8 = 58$  pies.

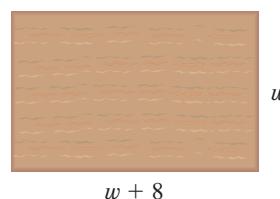


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39

**EJEMPLO 5** | Determinar la altura de un edificio usando triángulos semejantes

Un hombre que mide 6 pies de alto desea hallar la altura de cierto edificio de cuatro pisos. Mide su sombra y encuentra que es de 28 pies de largo, mientras que su propia sombra es de  $3\frac{1}{2}$  pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** El problema pide la altura del edificio. Por lo tanto, hagamos

$$h = \text{la altura del edificio}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** Usamos el dato que los triángulos de la Figura 3 son semejantes. Recuerde que para cualquier par de triángulos semejantes las relaciones entre lados correspondientes son iguales. Ahora convierta estas observaciones en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Altura del edificio	$h$
Razón entre altura y base en el triángulo grande	$\frac{h}{28}$
Razón entre altura y base en el triángulo pequeño	$\frac{6}{3.5}$

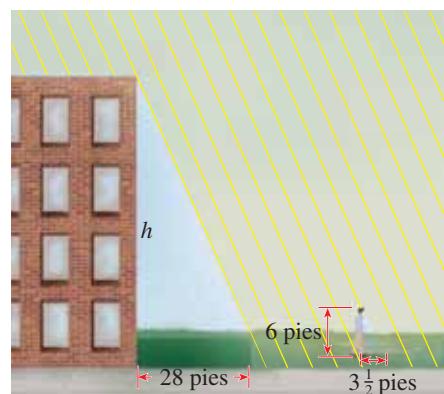


FIGURA 3

**Formule el modelo.** Como los triángulos grande y pequeño son semejantes, obtenemos la ecuación

$$\frac{\text{razón entre altura y base en triángulo grande}}{\text{razón entre altura y base en triángulo pequeño}} = \frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}$$

**Resuelva.** A continuación despeje  $h$ .

$$h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = 48 \quad \text{Multiplique por 28}$$

Entonces el edificio mide 48 pies de altura.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 51**

## ▼ Problemas de mezclas

Numerosos problemas reales se refieren a la mezcla de diferentes tipos de sustancias. Por ejemplo, trabajadores de la construcción deben mezclar cemento, grava y arena; el jugo de fruta de un concentrado puede tener mezcla de diferentes tipos de jugos. Los problemas de mezclas y concentraciones hacen uso del hecho de que si una cantidad  $x$  de una sustancia se disuelve en una solución con volumen  $V$ , entonces la concentración  $C$  de la sustancia está dada por

$$C = \frac{x}{V}$$

Por lo tanto, si 10 g de azúcar se disuelven en 5 L de agua, entonces la concentración de azúcar es  $C = 10/5 = 2$  g/L. Resolver un problema de mezclas por lo general nos pide analizar la cantidad  $x$  de la sustancia que está en la solución. Cuando despejamos  $x$  de esta ecuación, vemos que  $x = CV$ . Observe que en muchos problemas de mezcla la concentración  $C$  se expresa como porcentaje, como en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 6 | Mezclas y concentración

Un fabricante de bebidas gaseosas anuncia su refresco de naranja como “con sabor natural”, aun cuando contiene sólo 5% de jugo de naranja. Un nuevo reglamento federal estipula que para ser llamada “natural”, una bebida debe contener al menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja puro debe agregar este fabricante a 900 galones de refresco de naranja para apegarse al nuevo reglamento?

#### SOLUCIÓN

**Identifique la variable.** El problema pide la cantidad de jugo de naranja puro a ser agregado. Por lo tanto, hacemos

$x$  = la cantidad (en galones) de jugo de naranja puro a agregar

**Convierta las palabras en álgebra.** En cualquier problema de este tipo, en el que dos sustancias diferentes han de mezclarse, trazar un diagrama nos ayuda a organizar la información dada (vea Figura 4).

La información de la figura puede convertirse en lenguaje de álgebra, como sigue:

En palabras	En álgebra
Cantidad de jugo de naranja a agregar	$x$
Cantidad de la mezcla	$900 + x$
Cantidad de jugo de naranja en la primera tina	$0.05(900) = 45$
Cantidad de jugo de naranja en la segunda tina	$1 \cdot x = x$
Cantidad de jugo de naranja en la mezcla	$0.10(900 + x)$

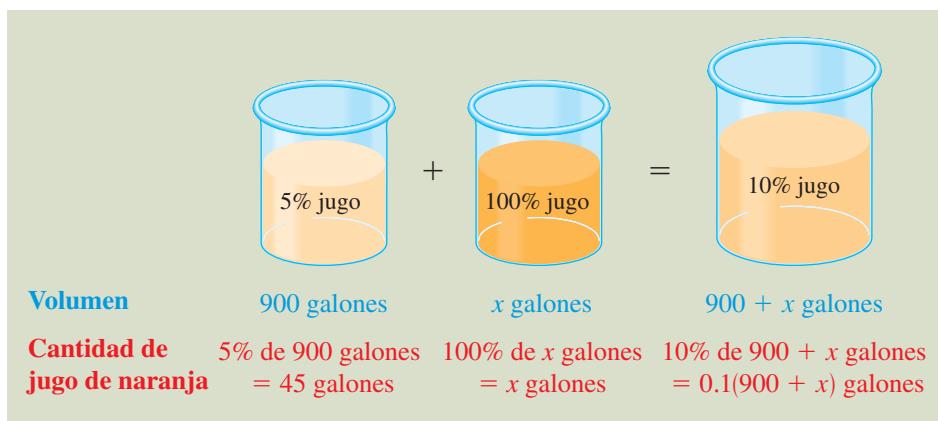


FIGURA 4

**Formule el modelo.** Para formular el modelo, usamos el dato de que la cantidad total de jugo de naranja en la mezcla es igual al jugo de naranja de las dos primeras tinas.

$$\begin{array}{c} \text{cantidad de jugo} \\ \text{de naranja en la} \\ \text{primera tina} \end{array} + \begin{array}{c} \text{cantidad de jugo} \\ \text{de naranja en la} \\ \text{segunda tina} \end{array} = \begin{array}{c} \text{cantidad de jugo} \\ \text{de naranja en} \\ \text{la mezcla} \end{array}$$

$$45 + x = 0.1(900 + x) \quad \text{De la Figura 4}$$

**Resuelva.** A continuación despeje la  $x$ .

$$45 + x = 90 + 0.1x \quad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$0.9x = 45 \quad \text{Rreste } 0.1x \text{ y } 45$$

$$x = \frac{45}{0.9} = 50 \quad \text{Divida entre } 0.9$$

El fabricante debe agregar 50 galones de jugo de naranja puro al refresco.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$$\begin{aligned} \text{cantidad de jugo antes de mezclar} &= 5\% \text{ de } 900 \text{ galones} + 50 \text{ galones de jugo puro} \\ &= 45 \text{ galones} + 50 \text{ galones} = 95 \text{ galones} \end{aligned}$$

$$\text{cantidad de jugo después de mezclar} = 10\% \text{ de } 950 \text{ galones} = 95 \text{ galones}$$

Las cantidades son iguales. ✓

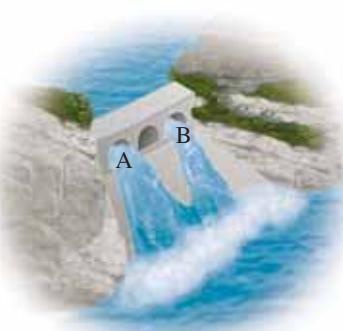
**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53**

**▼ Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo**

Cuando se resuelva un problema que trate de determinar el tiempo que tardan varios trabajadores en terminar un trabajo, usamos el dato de que si una persona o máquina tarda  $H$  unidades de tiempo para terminar el trabajo, entonces en una unidad de tiempo la parte del trabajo que se ha terminado es  $1/H$ . Por ejemplo, si un trabajador tarda 5 horas para podar un césped, entonces en 1 hora el trabajador podará  $1/5$  del césped.

**EJEMPLO 7 | Tiempo necesario para realizar un trabajo**

Debido a una fuerte tormenta anticipada, el nivel de agua en un estanque debe bajarse 1 pie. Abrir el vertedero A baja el nivel en esta cantidad en 4 horas, mientras que abrir el más pequeño vertedero B hace el trabajo en 6 horas. ¿Cuánto tardará en bajar el nivel de agua 1 pie con ambos vertederos abiertos?



**SOLUCIÓN** Identifique la variable. Nos piden hallar el tiempo necesario para bajar el nivel 1 pie si ambos vertederos están abiertos. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{tiempo (en horas) necesario para bajar el nivel de agua 1 pie si ambos vertederos están abiertos}$$

Convierta las palabras en álgebra. No es fácil hallar una ecuación que relacione  $x$  a las otras cantidades de este problema. Ciertamente  $x$  no es sólo  $4 + 6$ , porque eso significaría que los dos vertederos juntos necesitarían más tiempo para bajar el nivel del agua que cualquiera de ellos solo. En cambio, vemos la parte del trabajo que puede ejecutar en 1 hora cada uno de los vertederos.

En palabras	En álgebra
Tiempo que tarda en bajar el nivel 1 pie con A y B juntos	$x$ h
Distancia que A baja el nivel en 1 h	$\frac{1}{4}$ pie
Distancia que B baja el nivel en 1 h	$\frac{1}{6}$ pie
Distancia que A y B juntas bajan niveles en 1 h	$\frac{1}{x}$ pie

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\begin{array}{c} \text{fracción ejecutada} \\ \text{por A} \end{array} + \begin{array}{c} \text{fracción ejecutada} \\ \text{por B} \end{array} = \begin{array}{c} \text{fracción ejecutada} \\ \text{por ambos} \end{array}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

Resuelva. A continuación despejamos  $x$ .

$$\begin{array}{ll} 3x + 2x = 12 & \text{Multiplique por el MCD, } 12x \\ 5x = 12 & \text{Sume} \\ x = \frac{12}{5} & \text{Divida entre 5} \end{array}$$

Tardará  $2\frac{2}{5}$  horas, o 2 h 24 min, para bajar el nivel del agua 1 pie si ambos vertederos están abiertos.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 61

## ▼ Problemas de distancia, rapidez y tiempo

El siguiente ejemplo trata sobre distancia, tasa (rapidez) y tiempo. La fórmula a recordar en estos casos es

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}$$

donde la rapidez es ya sea la rapidez constante o el promedio de rapidez de un cuerpo en movimiento. Por ejemplo, manejar en auto a 60 mi/h durante 4 horas lleva a una persona a una distancia de  $60 \cdot 4 = 240$  millas.

### EJEMPLO 8 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Un jet voló de Nueva York a Los Ángeles, una distancia de 4200 kilómetros. La rapidez para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la rapidez en el vuelo de ida. Si el viaje total duró 13 horas, ¿cuál fue la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles?

**SOLUCIÓN** Identifique la variable. Nos piden la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles. Aquí hacemos

$$s = \text{rapidez de Nueva York a Los Ángeles}$$

$$\text{Entonces } s + 100 = \text{rapidez de Los Ángeles a Nueva York}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** A continuación organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna “Distancia” porque sabemos que las ciudades están a 4200 km entre sí. A continuación llenamos la columna “Rapidez”, porque hemos expresado ambas magnitudes de rapidez en términos de la variable  $x$ . Por último, calculamos las entradas para la columna “Tiempo”, usando

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

	Distancia (km)	Rapidez (km/h)	Tiempo (h)
N.Y. a L.A.	4200	$s$	$\frac{4200}{s}$
L.A. a N.Y.	4200	$s + 100$	$\frac{4200}{s + 100}$

**Formule el modelo.** El viaje total tomó 13 horas, de modo que tenemos el modelo

$$\text{tiempo de N.Y. a L.A.} + \text{tiempo de L.A. a N.Y.} = \text{tiempo total}$$

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$$

**Resuelva.** Multiplicando por el común denominador,  $s(s + 100)$ , tenemos

$$4200(s + 100) + 4200s = 13s(s + 100)$$

$$8400s + 420,000 = 13s^2 + 1300s$$

$$0 = 13s^2 - 7100s - 420,000$$

Aun cuando esta ecuación se factoriza, con números tan grandes es probable que sea más rápido usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora.

$$\begin{aligned} s &= \frac{7100 \pm \sqrt{(-7100)^2 - 4(13)(-420,000)}}{2(13)} \\ &= \frac{7100 \pm 8500}{26} \\ s &= 600 \quad \text{o} \quad s = \frac{-1400}{26} \approx -53.8 \end{aligned}$$

Como  $s$  representa la rapidez, rechazamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles fue de 600 km/h.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

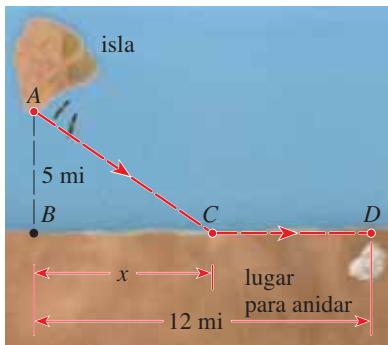


FIGURA 5

### EJEMPLO 9 | Energía consumida en el vuelo de un pájaro

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes cuerpos de agua durante horas del día, porque generalmente el aire se eleva sobre tierra y baja sobre el agua en el día, de modo que volar sobre el agua requiere de más energía. Un ave se suelta del punto  $A$  en una isla, a 5 millas de  $B$ , que es el punto más cercano a la playa en línea recta. El ave vuela al punto  $C$  en la playa y luego vuela a lo largo de la playa al lugar para anidar  $D$ , como se ve en la Figura 5. Suponga que el ave tiene 170 kcal de reservas de energía. Consume 10 kcal/milla volando sobre tierra y 14 kcal/milla volando sobre agua.

- (a) ¿En dónde debe estar ubicado el punto  $C$  para que el ave use exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo?
- (b) ¿El ave tiene suficientes reservas de energía para volar directamente de  $A$  a  $D$ ?

**BHASKARA** (nacido en 1114) fue un matemático, astrónomo y astrólogo de la India. Entre sus muchos logros estaba una ingeniosa demostración del Teorema de Pitágoras. (Vea *Enfoque en la solución de problemas*, en el sitio web [www.stewartmath.com](http://www.stewartmath.com), compañero de este libro). Su importante libro matemático *Lilavati* (*La Hermosa*) contiene problemas de álgebra planteados en forma de cuentos para su hija Lilavati. Muchos de los problemas empiezan así: "Oh, bella doncella, suponte..." La historieta se relata usando astrología. Bhaskara había determinado que grandes desgracias ocurrían a su hija si se casaba en cualquier momento que no fuera cierta hora de cierto día. El día de su boda, cuando ella estaba viendo con ansiedad un reloj de agua, una perla de su adorno de la cabeza cayó inadvertidamente y paró el flujo de agua del reloj, haciendo que ella perdiera el momento oportuno para su boda. El libro *Lilavati* de Bhaskara fue escrito para consolarla.

- (a) **Identifique la variable.** Nos piden hallar la ubicación de  $C$ . Hacemos

$$x = \text{distancia de } B \text{ a } C$$

- Convierta las palabras en álgebra.** De la figura, y del dato

energía consumida = energía por milla  $\times$  millas recorridas

determinamos lo siguiente.

En palabras	En álgebra
Distancia de $B$ a $C$	$x$
Distancia de vuelo sobre agua (de $A$ a $C$ )	$\sqrt{x^2 + 25}$
Distancia de vuelo sobre tierra (de $C$ a $D$ )	$12 - x$
Energía consumida sobre agua	$14\sqrt{x^2 + 25}$
Energía consumida sobre tierra	$10(12 - x)$

- Formule el modelo.** A continuación formulamos el modelo.

$$\begin{array}{lcl} \text{total de energía} & = & \text{energía consumida} + \text{energía consumida} \\ \text{consumida} & & \text{sobre agua} \quad \text{sobre tierra} \end{array}$$

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

- Resuelva.** Para resolver esta ecuación, eliminamos la raíz cuadrada al llevar primero todos los otros términos a la izquierda del signo igual y luego elevar al cuadrado ambos lados.

$$170 - 10(12 - x) = 14\sqrt{x^2 + 25}$$

Aíslle a la derecha el término de raíz cuadrada

$$50 + 10x = 14\sqrt{x^2 + 25}$$

Simplifique el lado izquierdo

$$(50 + 10x)^2 = (14)^2(x^2 + 25)$$

Eleve al cuadrado ambos lados

$$2500 + 1000x + 100x^2 = 196x^2 + 4900$$

Expanda

$$0 = 96x^2 - 1000x + 2400$$

Todos los términos al lado derecho

Esta ecuación podría factorizarse, pero como los números son tan grandes es más fácil usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora:

$$x = \frac{1000 \pm \sqrt{(-1000)^2 - 4(96)(2400)}}{2(96)}$$

$$= \frac{1000 \pm 280}{192} = 6\frac{2}{3} \text{ o } 3\frac{3}{4}$$

El punto  $C$  debe ser ya sea  $6\frac{2}{3}$  o  $3\frac{3}{4}$  millas desde  $B$  para que el ave consuma exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo.

- (b) Por el Teorema de Pitágoras (vea página 219), la longitud de la ruta directamente de  $A$  a  $D$  es  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ , de modo que la energía que el ave requiera para esa ruta es  $14 \times 13 = 182$  kcal. Esto es más energía de la que dispone el ave, de modo que no puede seguir esa ruta.



## 1.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- Explique verbalmente qué significa que una ecuación modele una situación real y dé un ejemplo.
- En la fórmula  $I = Prt$  para interés simple,  $P$  representa \_\_\_\_\_,  $r$  es \_\_\_\_\_ y  $t$  es \_\_\_\_\_.
- Dé una fórmula para el área de la figura geométrica.
  - Un cuadrado de lado  $x$ :  $A =$  \_\_\_\_\_.
  - Un rectángulo de longitud  $l$  y ancho  $w$ :  $A =$  \_\_\_\_\_.
  - Un círculo de radio  $r$ :  $A =$  \_\_\_\_\_.
- El vinagre balsámico contiene 5% de ácido acético, de modo que una botella de 32 onzas de vinagre balsámico contiene \_\_\_\_\_ onzas de ácido acético.
- Un pintor pinta una pared en  $x$  horas, por lo que la fracción de la pared que pinta en 1 hora es \_\_\_\_\_.
- La fórmula  $d = rt$  modela la distancia  $d$  recorrida por un objeto que se mueve a una rapidez  $r$  constante en el tiempo  $t$ . Encuentre fórmulas para las siguientes cantidades.

$$r = \text{_____} \quad t = \text{_____}$$

### HABILIDADES

- 7-18** ■ Exprese la cantidad dada en términos de la variable indicada.
- La suma de tres enteros consecutivos;  $n$  = primer entero de los tres
  - La suma de tres enteros consecutivos;  $n$  = entero intermedio de los tres
  - El promedio de tres calificaciones de examen si las dos primeras calificaciones son 78 y 82;  $s$  = tercera calificación de examen
  - El promedio de cuatro calificaciones de preguntas de cada una de las tres primeras calificaciones es 8;  $q$  = cuarta calificación de preguntas
  - El interés obtenido después de un año sobre una inversión es  $2\frac{1}{2}\%$  de interés simple por año;  $x$  = número de dólares invertidos
  - La renta total pagada por un apartamento si la renta es \$795 al mes;  $n$  = número de meses
  - El área (en pies<sup>2</sup>) de un rectángulo que mide tres veces más de largo que de ancho;  $w$  = ancho del rectángulo (en pies)
  - El perímetro (en cm) de un rectángulo que es 5 cm más largo que su ancho;  $w$  = ancho del rectángulo (en cm)
  - La distancia (en millas) que un auto recorre en 45 minutos;  $s$  = rapidez del auto (en mi/h)
  - El tiempo (en horas) que tarda en recorrer una distancia determinada a 55 mi/h;  $d$  = distancia dada (en millas)
  - La concentración (en oz/gal) de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera que contiene 25 onzas de sal a la que se ha agregado agua pura;  $x$  = volumen de agua pura agregada (en galones)
  - El valor (en centavos) del cambio en un monedero que contiene el doble de monedas de 5 centavos que de centavo, cuatro mo-

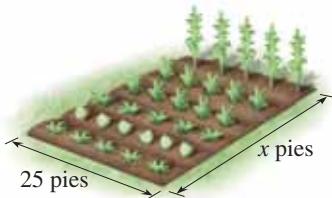
nedas de 10 centavos más que de 5 centavos, y tantas monedas de 25 centavos que de monedas de 5 combinadas;  $p$  = número de monedas de un centavo.

### APLICACIONES

- 19. Renta de un camión** Una compañía que renta vehículos cobra \$65 al día y 20 centavos por milla por rentar un camión. Miguel rentó un camión durante 3 días y su cuenta fue de \$275. ¿Cuántas millas recorrió?
- 20. Costos de teléfono celular** Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de \$10 por los primeros 1000 mensajes de texto y 10 centavos por cada mensaje adicional de texto. La cuenta de Miriam por mensajes de texto para el mes de junio es de \$38.50. ¿Cuántos mensajes de texto envió ella ese mes?
- 21. Inversiones** Felicia invirtió \$12,000, una parte de los cuales gana una tasa de interés simple de  $4\frac{1}{2}\%$  al año y el resto gana una tasa de 4% al año. Después de 1 año, el interés total ganado sobre estas inversiones fue de \$525. ¿Cuánto dinero invirtió ella a cada una de las tasas?
- 22. Inversiones** Si Benjamín invierte \$4000 al 4% de interés al año, ¿cuánto dinero adicional debe invertir al  $5\frac{1}{2}\%$  de interés anual, para asegurar que el interés que reciba cada año sea  $4\frac{1}{2}\%$  de la cantidad total invertida?
- 23. Inversiones** ¿Qué tasa anual de interés debe ganar una persona para ganar sobre una inversión de \$3500, para asegurar recibir \$262.50 de interés después de 1 año?
- 24. Inversiones** Jaime invierte \$1000 a cierta tasa de interés anual, e invierte otros \$2000 a una tasa anual que es medio por ciento más alta. Si él recibe un total de \$190 de interés en 1 año, ¿a qué tasa se invierten los \$1000?
- 25. Salarios** Una ejecutiva de una compañía de ingeniería gana un salario mensual más un bono de Navidad de \$8500. Si ella gana un total de \$97,300, ¿cuál es su salario mensual?
- 26. Salarios** Una mujer gana 15% más que su esposo. Juntos ganan \$69,875 al año. ¿Cuál es el salario anual del esposo?
- 27. Herencia** Camilo está ahorrando para comprarse una casa para vacacionar. Él hereda algún dinero de un tío rico, luego combina esto con los \$22,000 que ya había ahorrado y duplica el total en una inversión afortunada. Termina con \$134,000, que es justo lo suficiente para comprarse una cabaña junto a un lago. ¿Cuánto heredó?
- 28. Paga de tiempo extra** Elena gana \$7.50 por hora en su trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana le pagan  $1\frac{1}{2}$  veces su salario regular por las horas de tiempo extra trabajadas. En una semana ella gana un salario bruto de \$352.50. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó esa semana?
- 29. Costos de mano de obra** Un plomero y su ayudante trabajan juntos para cambiar las tuberías de una casa vieja. El plomero cobra \$45 por hora por su propio trabajo y \$25 por hora por el trabajo del ayudante. El plomero trabaja el doble de tiempo que su ayudante en el trabajo, y el cobro por mano de obra en la factura final es de \$4025. ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante en este trabajo?

- 30. Un acertijo** Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija; en 6 años, tendrá tres veces la edad que actualmente tiene su hija. ¿Cuál es la edad actual de la hija?
- 31. Un acertijo** Un actor de cine, que no está dispuesto a decir su edad, planteó el siguiente acertijo a un columnista de chismes. “Hace siete años, yo tenía 11 veces la edad de mi hija; ahora tengo cuatro veces su edad.” ¿Cuál es la edad del actor?
- 32. Cuadrangulares en su carrera** Durante su carrera en las Ligas Mayores, Hank Aaron conectó 41 cuadrangulares más de los que conectó Babe Ruth en su carrera. Juntos conectaron 1469 cuadrangulares. ¿Cuántos conectó Babe Ruth?
- 33. Valor de monedas** Un monedero contiene igual número de monedas de un centavo, de cinco centavos y de diez centavos. El valor total de las monedas es \$1.44. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene el monedero?
- 34. Valor de monedas** Mary tiene \$3.00 en monedas de 5, de 10 y de 25 centavos. Si ella tiene el doble de monedas de 10 que de 25 y cinco más de monedas de 5 que de 10 centavos, ¿cuántas monedas de cada tipo tiene ella?

- 35. Longitud de un jardín** Un jardín rectangular mide 25 pies de ancho. Si su área es de 1125 pies<sup>2</sup>, ¿cuál es la longitud del jardín?



- 36. Ancho de un pastizal** Un pastizal mide el doble de largo que su ancho. Su área es de 115,200 pies<sup>2</sup>. ¿Cuál es el ancho del pastizal?

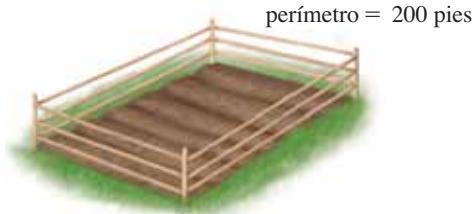
- 37. Dimensiones de un lote** Un lote de terreno cuadrado tiene una construcción de 60 pies de largo y 40 pies de ancho en una esquina. El resto del terreno fuera del edificio forma un estacionamiento. Si éste tiene un área de 12,000 pies<sup>2</sup>, ¿cuáles son las dimensiones de todo el lote de terreno?

- 38. Dimensiones de un lote** Un lote para construcción, de medio acre, mide 5 veces más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones? [Nota: 1 acre = 43,560 pies<sup>2</sup>.]

- 39. Dimensiones de un jardín** Un jardín rectangular mide 10 pies más de largo que de ancho. Su área es 875 pies<sup>2</sup>. ¿Cuáles son sus dimensiones?

- 40. Dimensiones de un cuarto** Una habitación rectangular mide 7 pies más de largo que su ancho. Su área es de 228 pies<sup>2</sup>. ¿Cuál es el ancho del cuarto?

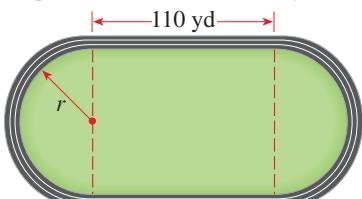
- 41. Dimensiones de un jardín** Un agricultor tiene un lote rectangular de jardín rodeado por una cerca de 200 pies. Encuentre la longitud y ancho si su área es de 2400 pies<sup>2</sup>.



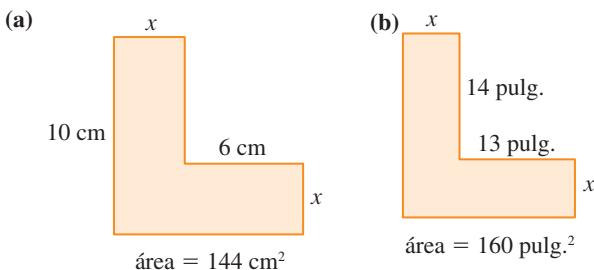
- 42. Dimensiones de un lote** Una parcela de terreno mide 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal desde una esquina a la esquina opuesta es de 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

- 43. Dimensiones de un lote** Una parcela rectangular de terreno mide 50 pies de ancho. La longitud de una diagonal entre esquinas opuestas es de 10 pies más que la longitud de la parcela. ¿Cuál es la longitud de la parcela?

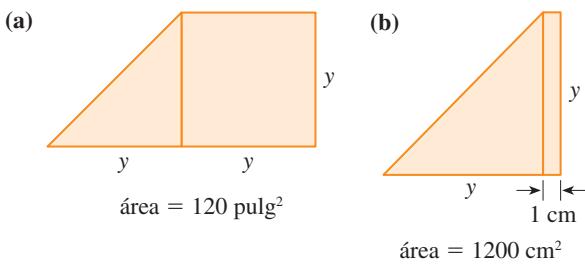
- 44. Dimensiones de una pista** Una pista de carreras tiene la forma mostrada en la figura, con costados rectos y extremos semicirculares. Si la longitud de la pista es de 440 yardas y las dos partes rectas miden 110 yardas de largo cada una, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares (a la yarda más cercana)?



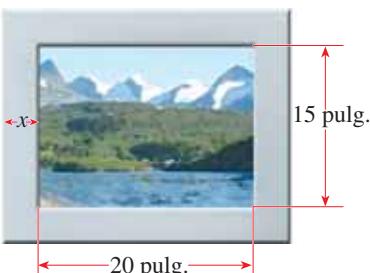
- 45. Longitud y área** Encuentre la longitud  $x$  de la figura. Se da el área de la región sombreada.



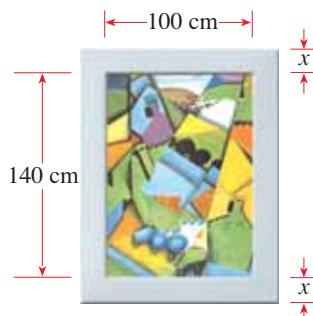
- 46. Longitud y área** Encuentre la longitud  $y$  de la figura. Se da el área de la región sombreada.



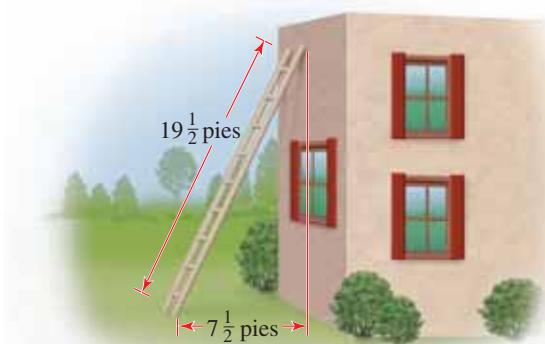
- 47. Enmarcar una pintura** Ali pinta con acuarela en una hoja de papel de 20 pulgadas de ancho por 15 pulgadas de alto. A continuación pone esta hoja en un marco de cartón de modo que una franja de ancho uniforme del marco de cartón se ve a todo alrededor de la pintura. El perímetro del marco de cartón es de 102 pulgadas. ¿Cuál es el ancho de la franja del marco de cartón que se ve alrededor de la pintura?



- 48. Dimensiones de un cartel** Un cartel tiene una superficie rectangular impresa de 100 cm por 140 cm y una franja negra de ancho uniforme alrededor de los bordes. El perímetro del cartel es  $1\frac{1}{2}$  veces el perímetro de la superficie impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja negra?



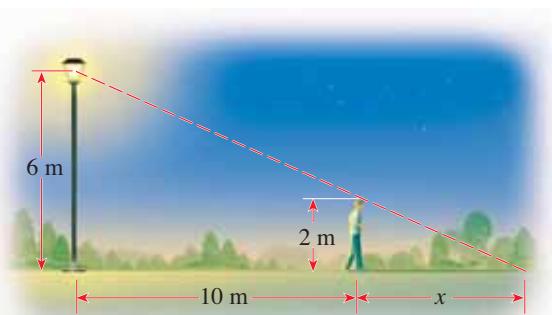
- 49. Alcance de una escalera** Una escalera de  $19\frac{1}{2}$  pies se apoya contra un edificio. La base de la escalera está a  $7\frac{1}{2}$  pies del edificio. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?



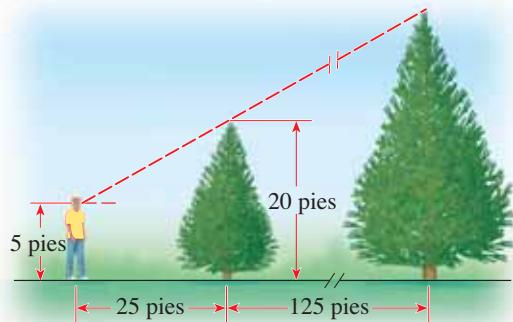
- 50. Altura de un asta de bandera** Un asta de bandera está asegurada en lados opuestos por medio de dos alambres (llamados “vientos”), cada uno de los cuales mide 5 pies más que el asta. La distancia entre los puntos donde los alambres se fijan al suelo es igual a la longitud de un alambre “viento”. ¿Cuál es la altura del asta de bandera (a la pulgada más cercana)?



- 51. Longitud de una sombra** Un hombre está alejándose de un poste de alumbrado que tiene una fuente de luz a 6 m sobre el suelo. El hombre mide 2 m de alto. ¿Cuál es la longitud de la sombra del hombre cuando éste está a 10 m del poste? [Sugerencia: Use triángulos semejantes.]



- 52. Altura de un árbol** Un maderero determina la altura de un árbol alto al medir uno más pequeño que está a 125 pies de distancia del primero, y luego moviéndose de manera que sus ojos estén en la línea de vista a lo largo de las cumbres de los árboles y midiendo la distancia a la que él está del árbol pequeño (vea la figura). Suponga que el árbol pequeño mide 20 pies de alto, el hombre está a 25 pies del árbol pequeño y el nivel de sus ojos está a 5 pies sobre el suelo. ¿Cuál es la altura del árbol más alto?



- 53. Problema de mezclas** ¿Qué cantidad de una solución ácida al 60% debe mezclarse con una solución al 30% para producir 300 mL de una solución al 50%?

- 54. Problema de mezclas** ¿Qué cantidad de ácido puro debe agregarse a 300 mL de una solución al 50% para producir una solución ácida al 60%?

- 55. Problema de mezclas** Una joyera tiene cinco anillos, cada uno de los cuales pesa 18 g, hechos de una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Ella decide fundir los anillos y agregar suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75%. ¿Cuánta plata debe agregar?

- 56. Problema de mezclas** Una olla tiene 6 L de salmuera a una concentración de 120 g/L. ¿Cuánta agua debe hervirse para aumentar la concentración a 200 g/L?

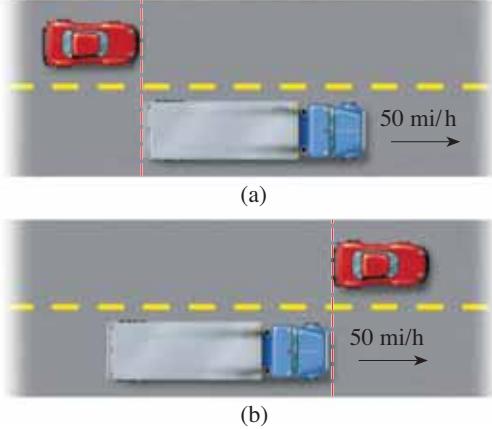
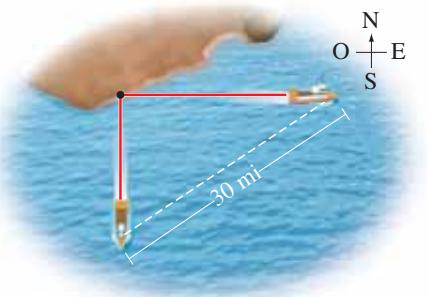
- 57. Problema de mezclas** El radiador de un auto está lleno de una solución al 60% de anticongelante y 40% de agua. El fabricante del anticongelante sugiere que para operar el auto en verano, el enfriamiento óptimo del auto se obtiene con sólo 50% de anticongelante. Si la capacidad del radiador es 3.6 L, ¿cuánto líquido de enfriamiento debe drenarse y sustituirse con agua para reducir la concentración de anticongelante al nivel recomendado?

- 58. Problema de mezclas** Una clínica utiliza una solución de blanqueador para esterilizar cajas de Petri en las que crecen cultivos. El tanque de esterilización contiene 100 galones de solu-

ción de blanqueador doméstico común al 2%, mezclado con agua destilada pura. Nuevas investigaciones indican que la concentración de blanqueador debe ser al 5% para completar la esterilización. ¿Cuánto de la solución debe drenarse y sustituirse con blanqueador para aumentar el contenido de blanqueador al nivel recomendado?

- 59. Problema de mezclas** Una botella contiene 750 mL de jugos de frutas con una concentración de 50% de jugo de frutas puro. Jill toma 100 mL del ponche y luego vuelve a llenar la botella con una cantidad igual de una marca más barata del ponche. Si la concentración del jugo en la botella se reduce ahora al 48%, ¿cuál era la concentración del ponche que agregó Jill?
- 60. Problema de mezclas** Un comerciante mezcla té que vende en \$3.00 por libra con té que vende en \$2.75 por libra para producir 80 lb de una mezcla que vende en \$2.90 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en la mezcla?
- 61. Compartir un trabajo** Candy y Tim comparten una ruta para vender periódicos. Candy tarda 70 minutos en entregar todos los periódicos; Tim tarda 80 minutos. ¿Cuánto tiempo les lleva a los dos cuando trabajan juntos?
- 62. Compartir un trabajo** Stan e Hilda pueden podar el césped en 40 minutos si trabajan juntos. Si Hilda trabaja el doble de rápido que Stan, ¿cuánto tiempo le lleva a Stan podar el césped él solo?
- 63. Compartir un trabajo** Betty y Karen han sido contratadas para pintar las casas en un nuevo fraccionamiento habitacional. Trabajando juntas, las mujeres pueden pintar una casa en dos tercios del tiempo que tarda Karen si trabaja sola. Betty tarda 6 horas en pintar una casa ella sola. ¿Cuánto tarda Karen en pintar una casa si trabaja sola?
- 64. Compartir un trabajo** Los vecinos Bob y Jim, que viven en casas contiguas entre sí, usan mangueras de ambas casas para llenar la piscina de Bob. Saben que tardan 18 horas usando ambas mangueras. También saben que la manguera de Bob, si se usa sola, toma 20% menos tiempo que la manguera de Jim sola. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar la piscina con cada una de las mangueras sola?
- 65. Compartir un trabajo** Irene y Henry, trabajando juntos, pueden lavar todas las ventanas de su casa en 1 h 48 minutos. Trabajando solo, Henry tarda 11 h más que Irene para hacer el trabajo. ¿Cuánto tarda cada persona trabajando sola para lavar todas las ventanas?
- 66. Compartir un trabajo** Jack, Kay y Lynn reparten volantes de publicidad en una pequeña población. Si cada persona trabaja sola, Jack tarda 4 h en repartir todos los volantes, y Lynn tarda 1 h más de lo que tarda Kay. Trabajando juntos, pueden repartir todos los volantes en 40% del tiempo que tarda Kay trabajando sola. ¿Cuánto le toma a Kay repartir todos los volantes ella sola?
- 67. Distancia, rapidez y tiempo** Wendy hizo un viaje de Davenport a Omaha, una distancia de 300 millas. En parte, viajó en autobús que llegó a la estación de ferrocarril justo a tiempo para que completara su viaje en tren. El autobús promedió 40 mi/h y el tren promedió 60 mi/h. Todo el viaje tomó 51 h. ¿Cuánto tardó Wendy en el tren?
- 68. Distancia, rapidez y tiempo** Dos ciclistas están a 90 millas entre sí. Arrancan en sus bicicletas al mismo tiempo uno hacia el otro. Uno de ellos pedalea el doble de rápido que el

otro. Si se encuentran 2 h más tarde, ¿a qué velocidad promedio está viajando cada uno de ellos?

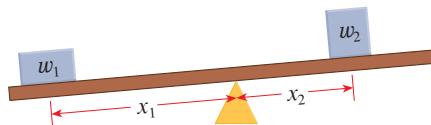
- 69. Distancia, rapidez y tiempo** Un piloto voló en jet de Montreal a Los Ángeles, una distancia de 2500 millas. En el viaje de regreso, el promedio de velocidad fue 20% más rápido que el de ida. El viaje redondo tardó 9 h 10 minutos. ¿Cuál fue la velocidad de Montreal a Los Ángeles?
- 70. Distancia, rapidez y tiempo** Una mujer que maneja un auto de 14 pies de largo está rebasando a un camión de 30 pies de largo. El camión está corriendo a 50 mi/h. ¿Con qué rapidez debe ir el auto de la mujer para que pueda pasar por completo al camión en 6 s, desde la posición mostrada en la figura (a) hasta la posición de la figura (b)? [Sugerencia: Use pies y segundos en lugar de millas y horas.]
- 
- 71. Distancia, rapidez y tiempo** Un vendedor viaja en auto de Ajax a Barrington, una distancia de 120 millas a una velocidad constante. A continuación aumenta su velocidad en 10 mi/h para recorrer las 150 millas de Barrington a Collins. Si el segundo tramo de su viaje tomó 6 minutos más que el primer tramo, ¿con qué rapidez manejaba entre Ajax y Barrington?
- 72. Distancia, rapidez y tiempo** Kiran viajó de Tortula a Cactus una distancia de 250 millas. Ella aumentó su velocidad en 10 mi/h para el viaje de 360 millas de Cactus a Dry Junction. Si el viaje total tomó 11 h, ¿cuál fue su velocidad de Tortula a Cactus?
- 73. Distancia, rapidez y tiempo** A una tripulación les tomó 2 h 40 min remar 6 km corriente arriba y regresar. Si la rapidez de la corriente era de 3 km/h, ¿cuál era la velocidad de remar de la tripulación en aguas tranquilas?
- 74. Velocidad de un bote** Dos botes pesqueros salen de un puerto al mismo tiempo, uno de ellos dirigiéndose al este y el otro al sur. El bote con dirección al este viaja a 3 mi/h más rápido que el que va al sur. Después de dos horas, los botes están a 30 millas entre sí. Encuentre la rapidez del bote que se dirige al sur.
- 

- 75. Ley de la palanca** La figura muestra un sistema de palancas, semejante a un subibaja (balancín) que se puede hallar en un parque de recreo infantil. Para que el sistema esté en equilibrio, el producto del peso y su distancia desde el fulcro debe ser igual en cada lado; esto es,

$$w_1x_1 = w_2x_2$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ley de la palanca** y fue descubierta por Arquímedes (vea página 729).

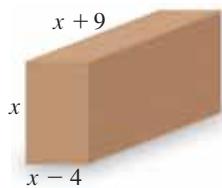
Una mujer y su hijo están jugando en un subibaja. El muchacho está en un extremo, a 8 pies del fulcro. Si el hijo pesa 100 lb y la madre pesa 125 lb, ¿dónde debe sentarse la mujer para que el subibaja esté balanceado?



- 76. Ley de la palanca** Una tabla de 30 pies de largo está apoyada en lo alto de un edificio de techo plano, con 5 pies de la tabla sobresaliendo del borde, como se ve en la figura. Un trabajador que pesa 240 lb se sienta en un extremo de la tabla. ¿Cuál es el peso máximo que puede ser colgado del extremo de la tabla que sobresale si debe estar en equilibrio? (Use la ley de la palanca expresada en el Ejercicio 75.)

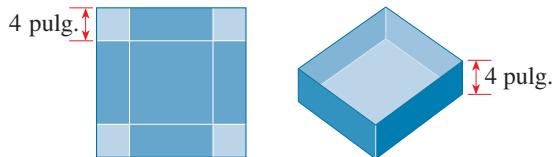


- 77. Dimensiones de una caja** Una caja grande de madera terciada tiene un volumen de 180 pies<sup>3</sup>. Su longitud es 9 pies más que su peso, y su ancho es 4 pies menor que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

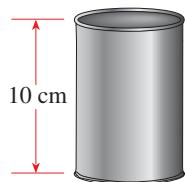


- 78. Radio de una esfera** Un joyero tiene tres pequeñas esferas de oro macizo, de 2 mm de radio, 3 mm y 4 mm. Él decide fundirlas y hacer con ellas una sola esfera. ¿Cuál será el radio de esta esfera más grande?

- 79. Dimensiones de una caja** Una caja con una base cuadrada y sin tapa ha de hacerse de una pieza cuadrada de cartón al cortarle cuadros de 4 pulgadas de cada esquina y doblar los lados, como se muestra en la figura. La caja ha de contener 100 pulg.<sup>3</sup>. ¿De qué dimensión se necesita la pieza de cartón?



- 80. Dimensiones de una lata** Una lata cilíndrica tiene un volumen de  $40\pi$  cm<sup>3</sup> y mide 10 cm de alto. ¿Cuál es su diámetro? [Sugerencia: Use la fórmula de volumen que aparece al final del libro.]



- 81. Radio de un tanque** Un tanque esférico tiene una capacidad de 750 galones. Usando el dato de que un galón es 0.1337 pies<sup>3</sup> aproximadamente, encuentre el radio del tanque (al centésimo de pie más cercano).

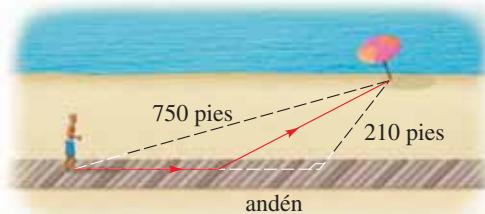
- 82. Dimensiones de un lote** Un lote urbano tiene la forma de un triángulo recto cuya hipotenusa es 7 pies más larga que uno de los otros lados. El perímetro del lote es de 392 pies. ¿Cuál es la longitud de cada lado del lote?

- 83. Costos de construcción** La ciudad de Foxton está a 10 millas al norte de un camino abandonado de dirección este-oeste que pasa por Grimley, como se ve en la figura. El punto del camino abandonado más cercano a Foxton está a 40 millas de Grimley. Oficiales del condado están por construir un nuevo camino que enlaza las dos ciudades. Han determinado que restaurar el camino antiguo costaría \$100,000 por milla, mientras que construir un nuevo camino costaría \$200,000 por milla. ¿Cuánto del camino abandonado debe usarse (como se indica en la figura) si los oficiales tienen intención de gastar exactamente \$6.8 millones de dólares? ¿Costaría menos que esto la construcción de un nuevo camino que conecte las ciudades directamente?



- 84. Distancia, rapidez y tiempo** Un entablado o andén de madera está paralelo y a 210 pies tierra adentro del borde de una playa recta. Una playa arenosa está entre el andén y el borde de la playa. Un hombre está de pie en el andén, exactamente a 750 pies de su sombrilla para playa al otro lado de la arena, que está recta en el borde de la playa. El hombre camina a 4 pies/s en el andén y a 2 pies/s en la arena. ¿Qué distancia

debe caminar en el andén antes de entrar a la arena si desea llegar a su sombrilla en exactamente 4 minutos 45 segundos?



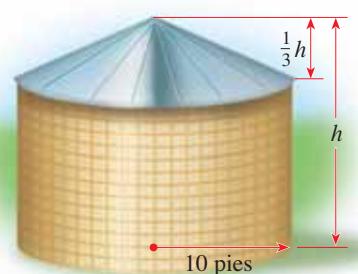
- 85. Volumen de grano** Están cayendo granos de un canal al suelo, formando una pila cónica cuyo diámetro es siempre el triple de su altura. ¿De qué altura es la pila (al centésimo de pie más cercano) cuando contiene 1000 pies<sup>3</sup> de grano?



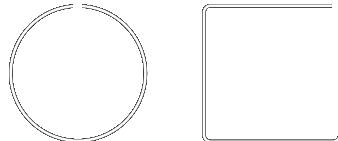
- 86. Monitores de TV** Dos monitores de TV, colocados uno al lado del otro en un estante de una tienda de aparatos eléctricos, tienen la misma altura de pantalla. Uno de ellos tiene una pantalla convencional, que es 5 pulgadas más ancha que su altura; el otro tiene una pantalla más ancha, de alta definición, que es 1.8 veces más ancha que su altura. La medida diagonal de la pantalla más ancha es 14 pulgadas más que la medida diagonal de la pantalla más pequeña. ¿Cuál es la altura de las pantallas, correcta al 0.1 de pulgada más cercano?



- 87. Dimensiones de una estructura** Un silo de almacenamiento para maíz está formado de una sección cilíndrica hecha de malla de alambre, rematada por un techo cónico de estaño, como se ve en la figura. La altura del techo es un tercio de la altura de toda la estructura. Si el volumen total de la estructura es  $1400\pi$  pies<sup>3</sup> y su radio es 10 pies, ¿cuál es su altura? [Sugerencia: Use las fórmulas de volumen al final del libro.]



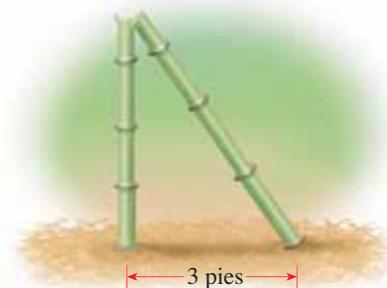
- 88. Comparación de áreas** Un alambre de 360 pulgadas de largo se corta en dos piezas. A una de éstas se le da forma de cuadrado y de círculo a la otra. Si las dos figuras tienen la misma área, ¿cuáles son las longitudes de las dos piezas de alambre (al décimo de pulgada más cercano)?



- 89. Un antiguo problema chino** Este problema ha sido tomado de un libro de texto chino llamado *Chui-chang suan-shu*, o *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, que fue escrito hacia el año 250 a.C.

Un tallo de bambú de 10 pies de largo se descompone en forma tal que su punta toca el suelo a 3 pies de la base del tallo, como se ve en la figura. ¿Cuál es la altura de la rotura?

[Sugerencia: Use el Teorema de Pitágoras.]



## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 90. Investigación histórica** Lea las notas biográficas acerca de Pitágoras (página 219), Euclides (página 497) y Arquímedes (página 729). Escoja uno de estos matemáticos e investigue más sobre él en la biblioteca o en Internet. Escriba un breve ensayo de lo que haya encontrado. Incluya información biográfica y una descripción de la matemática por la cual él es famoso.

- 91. Una ecuación cuadrática de Babilonia** Los antiguos babilonios sabían cómo resolver ecuaciones cuadráticas. A continuación veamos un problema de una tablilla cuneiforme hallada en una escuela de Babilonia, que data del año 2000 a.C.

Tengo un junco, sé su longitud. De él tomo un cúbito que cabe 60 veces a lo largo de mi campo. Lo devuelvo al junco que he dividido, y cabe 30 veces a lo ancho de mi campo. El área de mi campo es de 375 nindas (una medida) cuadradas. ¿Cuál era la longitud original del junco?

Resuelva este problema. Use el dato que 1 ninda = 12 cúbitos.



### PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

#### Ecuaciones a lo largo del tiempo

En este proyecto estudiamos ecuaciones que fueron creadas y resueltas por los pueblos antiguos de Egipto, Babilonia, India y China. El lector puede hallar el proyecto en el sitio web compañero de este libro: [www.stewartmath.com](http://www.stewartmath.com)

## 1.7 DESIGUALDADES

Resolución de desigualdades lineales ► Resolución de desigualdades no lineales ► Desigualdades con valor absoluto ► Modelado con desigualdades

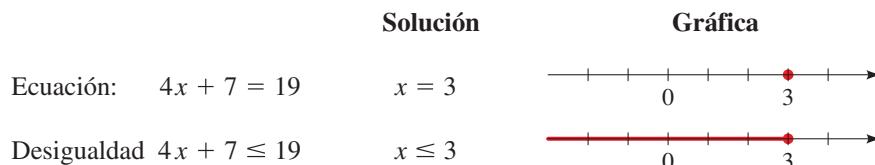
Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de los símbolos  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  o  $\geq$ . A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$x$	$4x + 7 \leq 19$
1	$11 \leq 19$ ✓
2	$15 \leq 19$ ✓
3	$19 \leq 19$ ✓
4	$23 \leq 19$ ✗
5	$27 \leq 19$ ✗

$$4x = 7 \leq 19$$

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no la satisfacen.

**Resolver** una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene un infinito de soluciones, que forma un intervalo o una unión de intervalos en la recta real. La siguiente ilustración muestra el modo en que una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:



Para resolver desigualdades, usamos las reglas siguientes para aislar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo  $\Leftrightarrow$  significa “es equivalente a”). En estas reglas los símbolos  $A$ ,  $B$  y  $C$  representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo  $\leq$ , pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

### REGLAS PARA DESIGUALDADES

#### Regla

$$1. A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$$

$$2. A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$$

$$3. \text{ Si } C > 0, \text{ entonces } A \leq B \Leftrightarrow CA \leq CB$$

$$4. \text{ Si } C < 0, \text{ entonces } A \leq B \Leftrightarrow CA \geq CB$$

$$5. \text{ Si } A > 0 \text{ y } B > 0, \text{ entonces } A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$$

$$6. \text{ Si } A \leq B \text{ y } C \leq D, \text{ entonces } A + C \leq B + D$$

#### Descripción

**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.

**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.

**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.

**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *negativa* *invierte la dirección* de la desigualdad.

**Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas* *invierte la dirección* de la desigualdad.

Las desigualdades se pueden sumar.



Ponga especial atención a las Reglas 3 y 4. La Regla 3 dice que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número *positivo*, pero la Regla 4 dice que **si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad**. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por  $-2$ , obtenemos

$$-6 > -10$$

## ▼ Solución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

### EJEMPLO 1 | Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad  $3x < 9x + 4$  y trace el conjunto solución.

#### SOLUCIÓN

$$3x < 9x + 4 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \quad \text{Reste } 9x$$

$$-6x < 4 \quad \text{Simplifique}$$

$$(-\frac{1}{6})(-6x) > (-\frac{1}{6})(4) \quad \text{Multiplique por } -\frac{1}{6} \text{ e invierta la desigualdad}$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \text{Simplifique}$$

Multiplicar por el número negativo  $-\frac{1}{6}$  invierte la dirección de la desigualdad.



FIGURA 1

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a  $-\frac{2}{3}$ . En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo  $(-\frac{2}{3}, \infty)$ . Está graficada en la Figura 1.

#### ► AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

### EJEMPLO 2 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades  $4 \leq 3x - 2 < 13$ .

**SOLUCIÓN** El conjunto solución está formado por todos los valores de  $x$  que satisfacen las desigualdades  $4 \leq 3x - 2$  y  $3x - 2 < 13$ . Usando las Reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$4 \leq 3x - 2 < 13 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$6 \leq 3x < 15 \quad \text{Sume 2}$$

$$2 \leq x < 5 \quad \text{Divida entre 3}$$



FIGURA 2

Por lo tanto, el conjunto de solución es  $[2, 5)$ , como se ve en la Figura 2.

#### ► AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

## ▼ Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

### EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad  $x^2 - 5x \leq -6$ , primero movemos todos los términos al lado izquierdo y factorizamos para obtener

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Esta forma de la desigualdad nos dice que el producto  $(x - 2)(x - 3)$  debe ser negativo o cero, de modo que, para resolver la desigualdad, debemos determinar en dónde cada factor es negativo o positivo (porque el signo de un producto depende del signo de los factores). Los detalles se explican en el Ejemplo 3, en el que usamos la guía siguiente.

### GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

- Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
- Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
- Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
- Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
- Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene  $\leq$  o  $\geq$ ).



La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la reescribimos, como se indica en el Paso 1.

### EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad  $x^2 \leq 5x - 6$ .

**SOLUCIÓN** Seguiremos la guía dada líneas antes.

**Pase todos los términos a un lado.** Pasamos todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 \leq 5x - 6 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \text{Reste } 5x, \text{ sume } 6$$

**Factorice.** Factorizando el lado izquierdo de la desigualdad, obtenemos

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0 \quad \text{Factorice}$$

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son  $x - 2$  y  $x - 3$ . Estos factores son cero cuando  $x$  es 2 y 3, respectivamente. Como se ve en la Figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos

$$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

Los factores  $x - 2$  y  $x - 3$  cambian de signo sólo en 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, estos factores mantienen su signo en cada uno de estos tres intervalos.

**Haga una tabla o diagrama.** Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos, usamos **valores de prueba**. Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores  $x - 2$  y  $x - 3$  en el número que escogamos. Para el intervalo  $(-\infty, 2)$ , escogamos el valor de prueba 1 (vea Figura 4). Sustituyendo 1 por  $x$  en los factores  $x - 2$  y  $x - 3$ , obtenemos

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

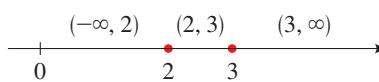


FIGURA 3

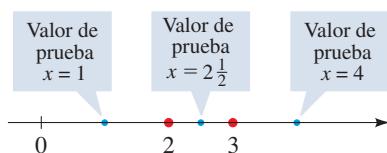


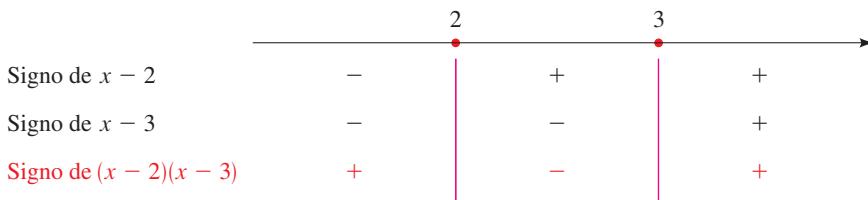
FIGURA 4

Por lo tanto ambos factores son negativos en este intervalo. Nótese que necesitamos verificar sólo un valor de prueba por cada intervalo porque los factores  $x - 2$  y  $x - 3$  no cambian signo en ninguno de los tres intervalos que encontramos.

Usando los valores de prueba  $x = 2\frac{1}{2}$  y  $x = 4$  para los intervalos  $(2, 3)$  y  $(3, \infty)$  (vea Figura 4), respectivamente, construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del dato que la expresión del último renglón es el producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	—	+	+
Signo de $x - 3$	—	—	+
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	+	—	+

Si el lector así lo prefiere, puede representar esta información en una recta real, como en el siguiente diagrama de signos. Las rectas verticales indican los puntos en los que la recta real está dividida en intervalos:



**Resuelva.** Leemos de la tabla o el diagrama que  $(x - 2)(x - 3)$  es negativo en el intervalo  $(2, 3)$ . Entonces, la solución de la desigualdad  $(x - 2)(x - 3) \leq 0$  es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

Hemos incluido los puntos extremos 2 y 3 porque buscamos valores de  $x$  tales que el producto es menor o igual a cero. La solución está ilustrada en la Figura 5.



FIGURA 5

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 41

#### EJEMPLO 4 | Resolver una desigualdad con factores repetidos

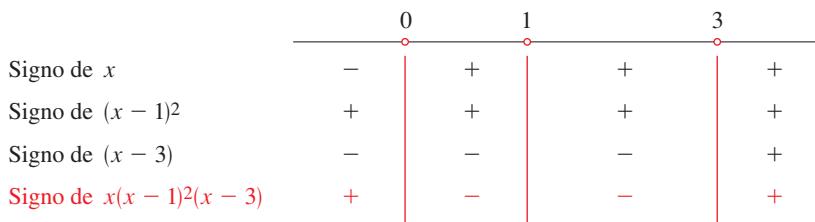
Resuelva la desigualdad  $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$ .

**SOLUCIÓN** Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por lo tanto, empezamos por hallar los intervalos para esta desigualdad.

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son  $x$ ,  $(x - 1)^2$  y  $x - 3$ . Éstos son cero cuando  $x = 0, 1, 3$ . Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 3), (3, \infty)$$

**Haga un diagrama.** Hacemos el siguiente diagrama, usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.



**Resuelva.** Del diagrama vemos que  $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$  para  $x$  en el intervalo  $(0, 1)$  o para  $x$  en  $(1, 3)$ . Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estos dos intervalos:

$$(0, 1) \cup (1, 3)$$



FIGURA 6

El conjunto solución está graficado en la Figura 6.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

### EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad  $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$

#### SOLUCIÓN

Pase todos los términos a un lado. Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \quad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \quad \text{Denominador común } 1-x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \quad \text{Combine las fracciones}$$

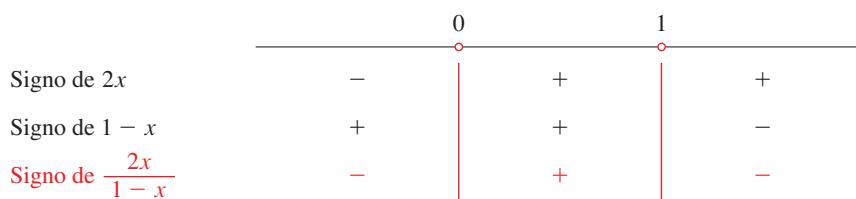
$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \quad \text{Simplifique}$$

🚫 Es tentador simplemente multiplicar ambos lados de la desigualdad por  $1 - x$  (como se haría si fuera una ecuación.) Pero esto no funciona porque no sabemos si  $1 - x$  es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Vea Ejercicio 123.)

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son  $2x$  y  $1 - x$ . Éstos son cero cuando  $x$  es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.



**Resuelva.** Del diagrama vemos que  $\frac{2x}{1-x} \geq 0$  para  $x$  en el intervalo  $[0, 1)$ . Incluimos el punto extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor o igual a 1. No obstante, no incluimos el otro punto extremo 1 porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$[0, 1)$$

El conjunto solución está graficado en la Figura 7.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 59



FIGURA 7

🚫 El Ejemplo 5 muestra que siempre debemos comprobar los puntos extremos del conjunto solución para ver si satisfacen la desigualdad original.

## ▼ Desigualdades con valor absoluto

Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

### PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Estas propiedades se cumplen cuando  $x$  es sustituida por cualquier expresión algebraica. (En la figura supusimos que  $c > 0$ .)

#### Desigualdad Forma equivalente

1.  $|x| < c$   $-c < x < c$
2.  $|x| \leq c$   $-c \leq x \leq c$
3.  $|x| > c$   $x < -c \text{ o } c < x$
4.  $|x| \geq c$   $x \leq -c \text{ o } c \leq x$

#### Gráfica

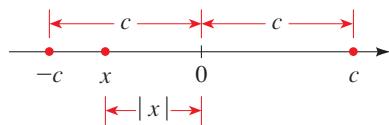
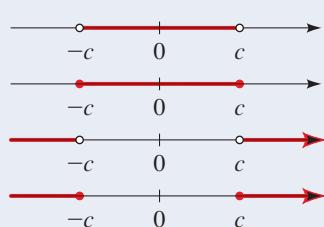


FIGURA 8

Estas propiedades se pueden demostrar con el uso de la definición de valor absoluto. Para demostrar la Propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad  $|x| < c$  dice que la distancia de  $x$  a 0 es menor que  $c$ , y de la Figura 8 vemos que esto es verdadero si y sólo si  $x$  está entre  $-c$  y  $c$ .

### EJEMPLO 6 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad  $|x - 5| < 2$ .

**SOLUCIÓN 1** La desigualdad  $|x - 5| < 2$  es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \quad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \quad \text{Sume 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto  $(3, 7)$ .

**SOLUCIÓN 2** Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números  $x$  cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la Figura 9 vemos que éste es el intervalo  $(3, 7)$ .

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 79

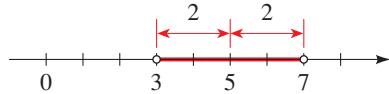


FIGURA 9

### EJEMPLO 7 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad  $|3x + 2| \geq 4$ .

**SOLUCIÓN** Por la Propiedad 4, la desigualdad  $|3x + 2| \geq 4$  es equivalente a

$$3x + 2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \leq -4$$

$$3x \geq 2 \quad 3x \leq -6 \quad \text{Reste 2}$$

$$x \geq \frac{2}{3} \quad x \leq -2 \quad \text{Divida entre 3}$$

Entonces el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \text{ o } x \geq \frac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en la Figura 10.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 83

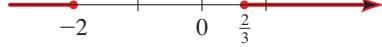


FIGURA 10

## ▼ Modelado con desigualdades

Modelar problemas prácticos lleva a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra.

**EJEMPLO 8** | Boletos para carnaval

Un carnaval tiene dos planes para boletos

Plan A: Cuota de \$5 la entrada y \$0.25 cada juego mecánico

Plan B: Cuota de \$2 la entrada y \$0.50 cada juego mecánico

¿Cuántos juegos mecánicos tendría que tomar para que el Plan A sea menos costoso que el Plan B?

**SOLUCIÓN** Identifique la variable. Nos piden el número de viajes en juego mecánico para el cual es menos costoso que el Plan B. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{número de viajes en juego mecánico}$$

Convierta las palabras en álgebra. La información del problema puede organizarse como sigue.

En palabras	En álgebra
Número de viajes	$x$
Costo con Plan A	$5 + 0.25x$
Costo con plan B	$2 + 0.50x$

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\begin{array}{c} \text{costo con} \\ \text{Plan A} \end{array} < \begin{array}{c} \text{costo con} \\ \text{Plan B} \end{array}$$

$$5 + 0.25x < 2 + 0.50x$$

Resuelva. A continuación despejamos  $x$ .

$$3 + 0.25x < 0.50x \quad \text{Reste 2}$$

$$3 < 0.25x \quad \text{Reste } 0.25x$$

$$12 < x \quad \text{Divida entre } 0.25$$

Entonces, si usted piensa tomar *más de* 12 viajes, el Plan A es menos costoso.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 107

**EJEMPLO 9** | Relación entre escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse a una temperatura entre  $5^{\circ}\text{C}$  y  $30^{\circ}\text{C}$ . ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Fahrenheit?

**SOLUCIÓN** La relación entre grados Celsius ( $C$ ) y grados Fahrenheit ( $F$ ) está dada por la ecuación  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ . Expresando el enunciado de la botella en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

Entonces las temperaturas Fahrenheit correspondientes satisfacen las desigualdades

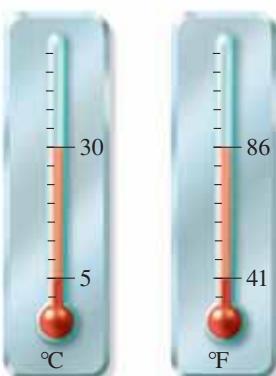
$$5 < \frac{5}{9}(F - 32) < 30 \quad \text{Sustituya } C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$\frac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \frac{9}{5} \cdot 30 \quad \text{Multiplique por } \frac{9}{5}$$

$$9 < F - 32 < 54 \quad \text{Simplifique}$$

$$9 + 32 < F < 54 + 32 \quad \text{Sume 32}$$

$$41 < F < 86 \quad \text{Simplifique}$$



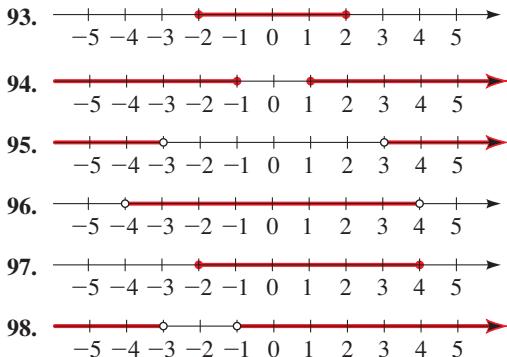
La medicina debe conservarse a una temperatura entre  $41^{\circ}\text{F}$  y  $86^{\circ}\text{F}$ .

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 105



90. Todos los números reales  $x$  más 2 unidades desde 0  
 91. Todos los números reales  $x$  menos 5 unidades desde 7  
 92. Todos los números reales  $x$  como máximo 4 desde 2

- 93–98 ■ Se grafica un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.



- 99–102 ■ Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como número real.

99.  $\sqrt{16 - 9x^2}$

100.  $\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

101.  $\left(\frac{1}{x^2 - 5x - 14}\right)^{1/2}$

102.  $\sqrt[4]{\frac{1-x}{2+x}}$

103. De la desigualdad despeje  $x$ , suponiendo que  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes positivas.

(a)  $a(bx - c) \geq bc$

(b)  $a \leq bx + c < 2a$

104. Suponga que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

## APLICACIONES

105. **Escalas de temperatura** Use la relación entre  $C$  y  $F$  dada en el Ejemplo 9 para hallar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al intervalo de temperatura  $20 \leq C \leq 30$ .

106. **Escalas de temperatura** ¿Cuál intervalo en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura  $50 \leq F \leq 95$ ?

107. **Costo de renta de un auto** Una compañía de renta de autos ofrece dos planes para renta de un auto.

Plan A: \$30 por día y \$0.10 por milla

Plan B: \$50 por día con kilometraje ilimitado

108. **Costo de llamadas de larga distancia** Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas de larga distancia.

Plan A: \$25 por mes y \$0.05 por minuto

Plan B: \$5 por mes y \$0.12 por minuto

¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia sería financieramente ventajoso el Plan B?

109. **Costo de manejar un auto** Se estima que el costo anual de manejar cierto auto nuevo está dado por la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde  $m$  representa el número de millas recorridas por año y  $C$  es el costo en dólares. Juana compró ese auto y decide presupuestar entre \$6400 y \$7100 para costos de manejo del año siguiente. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que ella puede manejar su nuevo auto?

110. **Temperatura del aire** Cuando el aire asciende, se dilata y, al dilatarse, se enfriá a razón de alrededor de  $1^{\circ}\text{C}$  por cada 100 metros de ascenso hasta unos 12 km.

(a) Si la temperatura del suelo es de  $20^{\circ}\text{C}$ , escriba una fórmula para la temperatura a una altura  $h$ .

(b) ¿Qué intervalo de temperaturas se puede esperar si un avión despega y alcanza una altitud máxima de 5 km?

111. **Precio de boleto en una aerolínea** Una aerolínea que hace vuelos especiales encuentra que, en sus vuelos de sábados de Filadelfia a Londres, los 120 asientos se venderán si el precio es de \$200. No obstante, por cada aumento de \$3 en el precio del boleto, el número de asientos disminuye en uno.

(a) Encuentre una fórmula para el número de asientos vendidos si el precio del boleto es de  $P$  dólares.

(b) Durante cierto período, el número de asientos vendidos para este vuelo variaban entre 90 y 115. ¿Cuál era la variación correspondiente de precios de boletos?

112. **Precisión de una báscula** Un comerciante de café vende a un cliente 3 lb de café Hawaiian Kona a \$6.50 por libra. La báscula del comerciante es precisa con variación no mayor de  $\pm 0.03$  lb. ¿Cuánto podría habérsele cobrado de más o de menos al cliente por la posible imprecisión de la báscula?

113. **Gravedad** La fuerza gravitacional  $F$  ejercida por la Tierra sobre un cuerpo que tiene una masa de 100 kg está dada por la ecuación

$$F = \frac{4,000,000}{d^2}$$

donde  $d$  es la distancia (en km) del objeto desde el centro de la Tierra, y la fuerza  $F$  se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias será entre 0.0004 N y 0.01 N la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre este cuerpo?

114. **Temperatura de una fogata** En la cercanía de una fogata, la temperatura  $T$  en  $^{\circ}\text{C}$  a una distancia de  $x$  metros del centro de la fogata está dada por

$$T = \frac{600,000}{x^2 + 300}$$

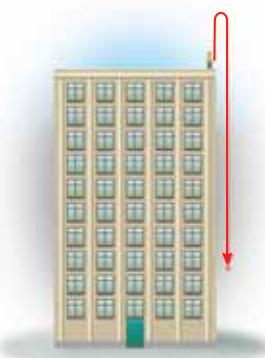
¿A qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata era la temperatura menor a  $500^{\circ}\text{C}$ ?



- 115. Una pelota en caída** Usando cálculo, se puede demostrar que si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 16 pies/s desde lo alto de un edificio de 128 pies de alto, entonces su altura  $h$  sobre el suelo  $t$  segundos después será

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota al menos a 32 pies sobre el suelo?

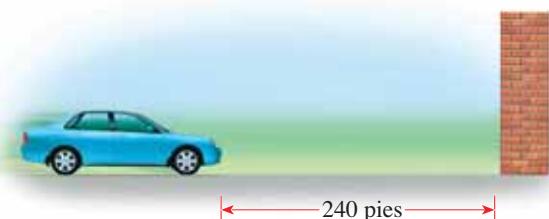


- 116. Rendimiento de gasolina** El rendimiento de gasolina  $g$  (medido en millas/gal) para un auto en particular, manejado a  $v$  mi/h, está dado por la fórmula  $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$ , mientras  $v$  esté entre 10 mi/h y 75 mi/h. ¿Para qué intervalo de velocidades el rendimiento del vehículo será de 30 mi/gal o mejor?

- 117. Distancia de parada** Para cierto modelo de auto, la distancia  $d$  requerida para parar el vehículo si está corriendo a  $v$  mi/h está dada por la fórmula

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

donde  $d$  se mide en pies. Kerry desea que su distancia de parada no rebase los 240 pies. ¿A qué intervalo de velocidades puede manejar ella?



- 118. Utilidades de un fabricante** Si un fabricante vende  $x$  unidades de cierto producto, el ingreso  $R$  y el costo  $C$  (en dólares) están dados por

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Utilice el hecho de que

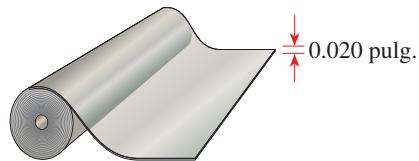
$$\text{utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo}$$

para determinar cuántas unidades debe vender el fabricante para disfrutar de una utilidad de al menos \$2400.

- 119. Cercar un jardín** Una jardinera tiene 120 pies de cerca resistente a venados. Ella desea encerrar un jardín rectangular de verduras en su patio trasero, y que el área encerrada sea al menos de 800 pies<sup>2</sup>. ¿Qué intervalo de valores es posible para la longitud de su jardín?

- 120. Grueso de un laminado** Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con base de nylon) de 0.020 pulgadas de grosor, con una tolerancia de 0.003 pulgadas.

- (a) Encuentre una desigualdad que contenga valores absolutos que describa el intervalo del posible grueso para el laminado.
- (b) Resuelva la desigualdad que haya encontrado en la parte (a).



- 121. Intervalo de estatura** El promedio de estatura de hombres adultos es de 68.2 pulgadas y 95% de ellos tiene una estatura  $h$  que satisface la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \leq 2$$

Resuelva la desigualdad para hallar el intervalo de estaturas.

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 122. ¿Las potencias preservan el orden?** Si  $a < b$ , ¿ $a^2 < b^2$ ? (Verifique valores positivos y negativos para  $a$  y  $b$ .) Si  $a < b$ , ¿ $a^3 < b^3$ ? Con base en sus observaciones, exprese una regla general acerca de la relación entre  $a^n$  y  $b^n$  cuando  $a < b$  y  $n$  es un entero positivo.

- 123. ¿Qué está mal aquí?** Es tentador tratar de resolver una desigualdad como si fuera una ecuación. Por ejemplo, podríamos tratar de resolver  $1 < 3/x$  multiplicando ambos lados por  $x$ , para obtener  $x < 3$ , de modo que la solución sería  $(-\infty, 3)$ . Pero eso está mal; por ejemplo,  $x = -1$  está en el intervalo pero no satisface la desigualdad original. Explique por qué este método no funciona (piense en el *signo* de  $x$ ). A continuación resuelva correctamente la desigualdad.

- 124. Uso de distancias para resolver desigualdades de valor absoluto** Recuerde que  $|a - b|$  es la distancia entre  $a$  y  $b$  en la recta numérica. Para cualquier número  $x$ , ¿qué representan  $|x - 1| < |x - 3|$ ? Use esta interpretación para resolver la desigualdad  $|x - 1| < |x - 3|$  geométricamente. En general, si  $a < b$ , ¿cuál es la solución de la desigualdad  $|x - a| < |x - b|$ ?

## 1.8 GEOMETRÍA DE COORDENADAS

- El plano coordenado ► Las fórmulas para distancia y punto medio
- Gráficas de ecuaciones con dos variables ► Puntos de intersección
- Círculos ► Simetría

El *plano coordenado* es el vínculo entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Las gráficas, a su vez, nos permiten “ver” la relación entre las variables de la ecuación. En esta sección estudiamos el plano coordenado.

### ▼ El plano coordenado

El *plano cartesiano* recibe ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596–1650), aun cuando otro francés, Pierre Fermat (1601–1665), inventó los principios de geometría de coordenadas al mismo tiempo. (Vea sus biografías en las páginas 181 y 99.)

En la misma forma en que puntos sobre una recta pueden ser identificados con números reales para formar la recta coordenada, los puntos en un plano se pueden identificar con pares ordenados de números para formar el **plano coordenado** o **plano cartesiano**. Para hacer esto, trazamos dos rectas reales perpendiculares que se cruzan en 0 en cada recta. Por lo general, una recta es horizontal con dirección positiva a la derecha y se llama **eje x**; la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba y se denomina **eje y**. El punto de intersección del eje *x* y el eje *y* es el **origen O**, y los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**, marcados I, II, III y IV en la Figura 1. (Los puntos *sobre* los ejes coordinados no se asignan a ningún cuadrante.)

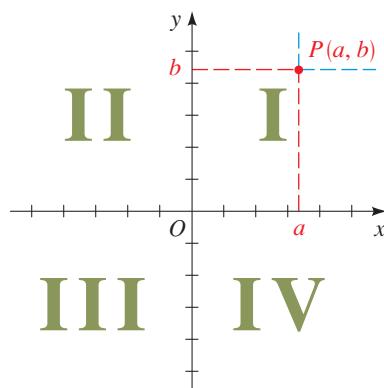


FIGURA 1

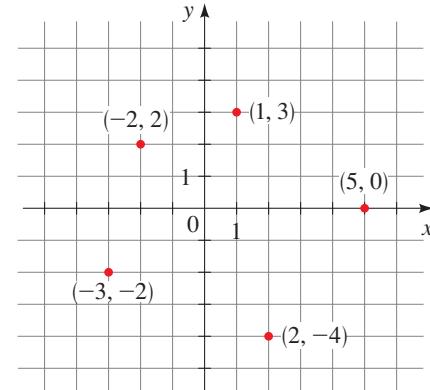


FIGURA 2

Aun cuando la notación para un punto  $(a, b)$  es la misma que la notación para un intervalo abierto  $(a, b)$ , el contexto debe dejar claro cuál significado se persigue.

Cualquier punto  $P$  del plano coordenado puede ser localizado por un **par ordenado** de números  $(a, b)$ , como se muestra en la Figura 1. El primer número  $a$  se llama **coordenada x** de  $P$ ; el segundo número  $b$  se llama **coordenada y** de  $P$ . Podemos considerar las coordenadas de  $P$  como su “dirección”, porque especifican su ubicación en el plano. Varios puntos están marcados en la Figura 2.

### EJEMPLO 1 | Graficar regiones en el plano coordenado

Describa y trace las regiones dadas por cada conjunto.

- (a)  $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$       (b)  $\{(x, y) \mid y = 1\}$       (c)  $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

### SOLUCIÓN

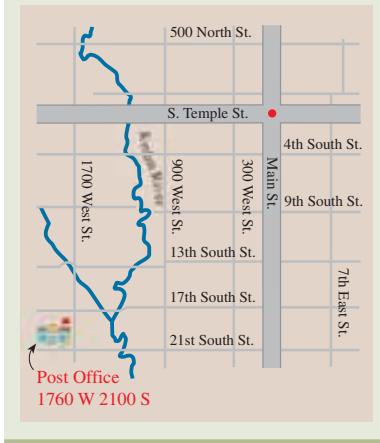
- (a) Los puntos cuyas coordenadas  $x$  son 0 o positivos se encuentran sobre el eje  $y$  o a la derecha del mismo, como se ve en la Figura 3(a).
- (b) El conjunto de todos los puntos con coordenada  $y = 1$  es una recta horizontal que está una unidad arriba del eje  $x$ , como se ve en la Figura 3(b).

### Coordenadas como direcciones

Las coordenadas de un punto en el plano  $xy$  determinan de manera única su ubicación. Podemos considerar las coordenadas como la “dirección” del punto. En Salt Lake City, Utah, las direcciones de casi todos los edificios están de hecho expresadas como coordenadas. La ciudad está dividida en cuadrantes con la Calle Principal como eje vertical (Norte–Sur) y la Calle del Templo S. como eje horizontal (Oriente–Poniente). Una dirección como

1760 W 2100 S

indica una ubicación a 17.6 manzanas al poniente de la Calle Principal y 21 manzanas al sur de la Calle del Templo S. (Ésta es la dirección de la oficina principal de correos en Salt Lake City.) Con este sistema lógico es posible que alguien no familiarizado con la ciudad pueda localizar de inmediato cualquier dirección, tan fácil como uno localiza un punto en el plano coordenado.



(c) Recuerde, de la Sección 1.7, que

$$|y| < 1 \quad \text{si y sólo si} \quad -1 < y < 1$$

Entonces la región dada está formada por los puntos del plano cuyos ejes coordenados  $y$  están entre  $-1$  y  $1$ . Por lo tanto, la región dada consta de todos los puntos que están entre (pero no sobre) las rectas horizontales  $y = 1$  y  $y = -1$ . Estas rectas se muestran como líneas interrumpidas en la Figura 3(c) para indicar que los puntos sobre estas rectas no están en el conjunto.

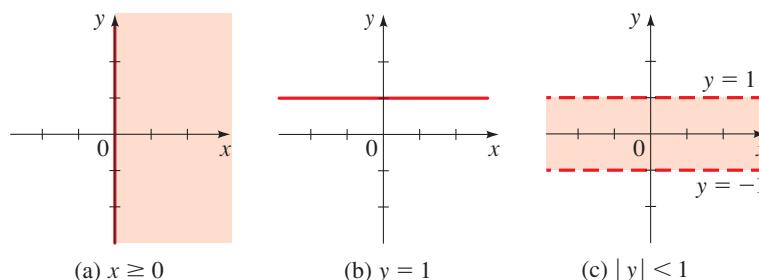


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 23, 25 Y 29

### ▼ Las fórmulas para distancia y punto medio

A continuación encontramos una fórmula para la distancia  $d(A, B)$  entre dos puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  del plano. Recuerde de la Sección 1.1 que la distancia entre los puntos  $a$  y  $b$  en una recta numérica es  $d(a, b) = |b - a|$ . Entonces, de la Figura 4, vemos que la distancia entre los puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $C(x_2, y_1)$  sobre una recta horizontal debe ser  $|x_2 - x_1|$ , y la distancia entre  $B(x_2, y_2)$  y  $C(x_2, y_1)$  sobre una recta vertical debe ser  $|y_2 - y_1|$ .

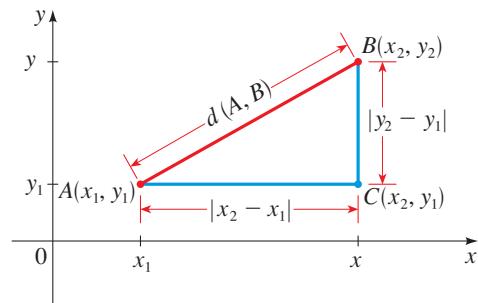


FIGURA 4

Como el triángulo  $ABC$  es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras da

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

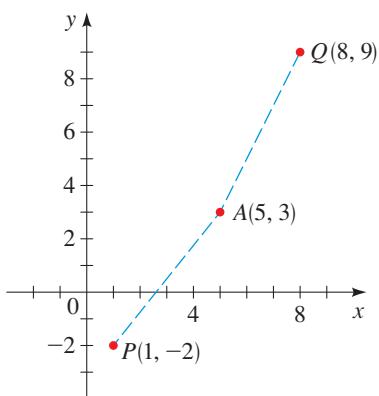
#### FÓRMULA PARA DISTANCIAS

La distancia entre los puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  en el plano es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### EJEMPLO 2 | Aplicar la fórmula para distancias

¿Cuál de los puntos  $P(1, -2)$  o  $Q(8, 9)$  está más cercano al punto  $A(5, 3)$ ?



## FIGURA 5

**SOLUCIÓN** Por la Fórmula para distancias tenemos

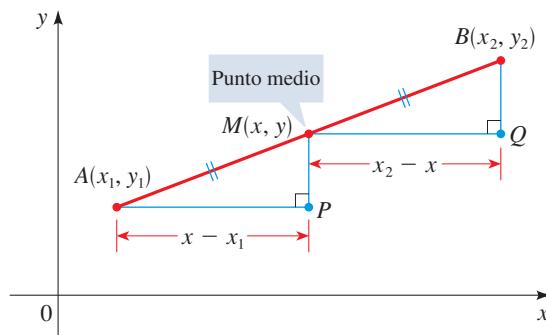
$$d(P, A) = \sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$d(Q, A) = \sqrt{(5 - 8)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

Esto demuestra que  $d(P, A) < d(Q, A)$ , de modo que  $P$  está más cercano a  $A$  (vea Figura 5).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 33

Ahora encontremos las coordenadas  $(x, y)$  del punto medio  $M$  del segmento de recta que une al punto  $A(x_1, y_1)$  al punto  $B(x_2, y_2)$ . En la Figura 6 observe que los triángulos  $APM$  y  $MQB$  son congruentes porque  $d(A, M) = d(M, B)$  y los ángulos correspondientes son iguales.



## FIGURA 6

Se deduce que  $d(A, P) = d(M, Q)$ , por lo que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Despejando  $x$  de esta ecuación obtendremos  $2x = x_1 + x_2$ , por lo que  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Del mismo modo,  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

## FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

El punto medio del segmento de recta de  $A(x_1, y_1)$  al punto  $B(x_2, y_2)$  es

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

**EJEMPLO 3** | Aplicar la fórmula del punto medio

Demuestre que el cuadrilátero con vértices  $P(1, 2)$ ,  $Q(4, 4)$ ,  $R(5, 9)$  y  $S(2, 7)$  es un paralelogramo al probar que sus diagonales se bisecan entre sí.

**SOLUCIÓN** Si las dos diagonales tienen el mismo punto medio, entonces deben bisecarse entre sí. El punto medio de la diagonal  $PR$  es

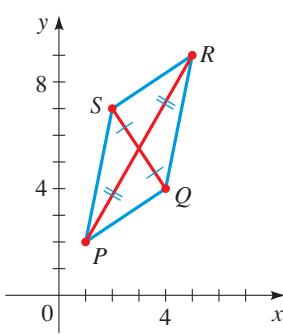
$$\left( \frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2} \right) = \left( 3, \frac{11}{2} \right)$$

y el punto medio de la diagonal  $QS$  es

$$\left( \frac{4+2}{2}, \frac{4+7}{2} \right) = \left( 3, \frac{11}{2} \right)$$

de modo que cada diagonal biseca a la otra, como se ve en la Figura 7. (Un teorema de geometría elemental dice que el cuadrilátero es por lo tanto un paralelogramo.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 37



## FIGURA 7

### Principio fundamental de la Geometría Analítica

Un punto  $(x, y)$  está sobre la gráfica de una ecuación si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación.

## ▼ Gráficas de ecuaciones con dos variables

Una **ecuación con dos variables**, por ejemplo  $y = x^2 + 1$ , expresa una relación entre dos cantidades. Un punto  $(x, y)$  **satisface** la ecuación si hace verdadera a la ecuación cuando los valores para  $x$  y  $y$  son sustituidos en la ecuación. Por ejemplo, el punto  $(3, 10)$  satisface la ecuación  $y = x^2 + 1$  porque  $10 = 3^2 + 1$ , pero el punto  $(1, 3)$  no la satisface porque  $3 \neq 1^2 + 1$ .

### LA GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN

La **gráfica** de una ecuación en  $x$  y  $y$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  del plano de coordenadas que satisface la ecuación.

La gráfica de una ecuación es una curva, de manera que para graficar una ecuación localizamos tantos puntos como podamos y a continuación los enlazamos con una curva sin cambios bruscos de dirección.

### EJEMPLO 4 | Trazar una gráfica localizando puntos

Trace la gráfica de la ecuación  $2x - y = 3$ .

**SOLUCIÓN** Primero despejamos  $y$  de la ecuación dada para obtener

$$y = 2x - 3$$

Esto nos ayuda a calcular las coordenadas  $y$  en la tabla siguiente.

$x$	$y = 2x - 3$	$(x, y)$
-1	-5	(-1, -5)
0	-3	(0, -3)
1	-1	(1, -1)
2	1	(2, 1)
3	3	(3, 3)
4	5	(4, 5)

Desde luego que hay un infinito de puntos y es imposible localizarlos todos, pero, cuantos más puntos localicemos, mejor podemos imaginar el aspecto de la gráfica representada por la ecuación. Localizamos los puntos hallados en la Figura 8; parecen encontrarse sobre una recta, por lo cual completamos la gráfica al unir los puntos con una recta. (En la Sección 1.10 verificamos que la gráfica de esta ecuación es en verdad una recta.)

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 59

FIGURA 8

En el Capítulo 10 se presenta una discusión detallada de paráolas y sus propiedades geométricas.

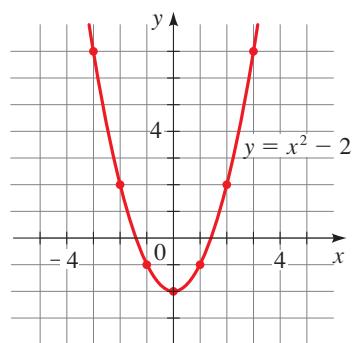


FIGURA 9

### EJEMPLO 5 | Trazar una gráfica al localizar puntos

Trace la gráfica de la ecuación  $y = x^2 - 2$ .

**SOLUCIÓN** En la tabla siguiente encontramos algunos de los puntos que satisfacen la ecuación. En la Figura 9 localizamos estos puntos y luego los conectamos por medio de una curva sin cambios bruscos de dirección. Una curva con esta forma recibe el nombre de *parábola*.

$x$	$y = x^2 - 2$	$(x, y)$
-3	7	(-3, 7)
-2	2	(-2, 2)
-1	-1	(-1, -1)
0	-2	(0, -2)
1	-1	(1, -1)
2	2	(2, 2)
3	7	(3, 7)

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 63

**EJEMPLO 6** | Gráfica de una ecuación con valor absoluto

Trace la gráfica de la ecuación  $y = |x|$ .

**SOLUCIÓN** Hacemos una tabla de valores:

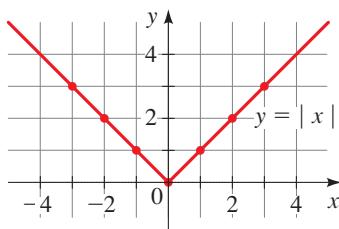


FIGURA 10

$x$	$y =  x $	$(x, y)$
-3	3	(-3, 3)
-2	2	(-2, 2)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)

En la Figura 10 localizamos estos puntos y los usamos para trazar la gráfica de la ecuación.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 75

### ▼ Puntos de intersección

Las coordenadas  $x$  de los puntos donde una gráfica interseca al eje  $x$  reciben el nombre de **puntos de intersección  $x$**  de la gráfica y se obtienen al hacer  $y = 0$  en la ecuación de la gráfica. Las coordenadas  $y$  de los puntos donde una gráfica interseca al eje  $y$  se denominan **puntos de intersección  $y$**  de la gráfica y se obtienen al hacer  $x = 0$  en la ecuación de la gráfica.

#### DEFINICIÓN DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN

##### Puntos de intersección

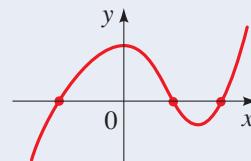
###### Puntos de intersección $x$ :

Las coordenadas  $x$  de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje  $x$

##### Cómo hallarlos

Haga  $y = 0$  y despeje  $x$

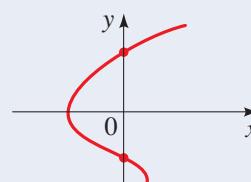
##### En dónde están sobre la gráfica



###### Puntos de intersección $y$ :

Las coordenadas  $y$  de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje  $y$

Haga  $x = 0$  y despeje  $y$



### EJEMPLO 7 | Hallar puntos de intersección

Encuentre los puntos de intersección  $x$  y  $y$  de la ecuación  $y = x^2 - 2$ .

**SOLUCIÓN** Para hallar los puntos de intersección  $x$ , hacemos  $y = 0$  y despejamos  $x$ . Así,

$$0 = x^2 - 2 \quad \text{Haga } y = 0$$

$$x^2 = 2 \quad \text{Sume 2 a cada lado}$$

$$x = \pm\sqrt{2} \quad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

Los puntos de intersección  $x$  son  $\sqrt{2}$  y  $-\sqrt{2}$ .

Para hallar los puntos de intersección  $y$ , hacemos  $x = 0$  y despejamos  $y$ . Así,

$$y = 0^2 - 2 \quad \text{Haga } x = 0 \\ y = -2$$

El punto de intersección  $y$  es  $-2$ .

La gráfica de esta ecuación se trazó en el Ejemplo 5. Se repite en la Figura 11 con los puntos de intersección  $x$  y  $y$  marcados.

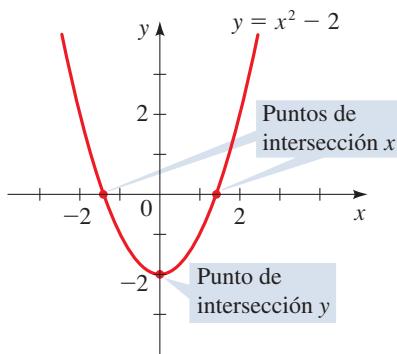


FIGURA 11

**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 65**

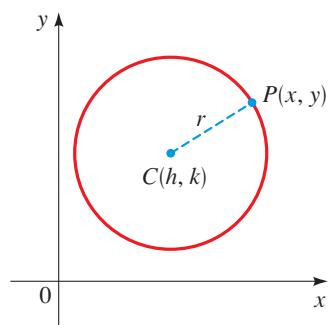


FIGURA 12

## ▼ Circunferencias

Hasta este punto, hemos estudiado cómo hallar la gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$ . El problema inverso es hallar una ecuación de una gráfica, es decir, una ecuación que represente una curva determinada en el plano  $xy$ . Esta ecuación queda satisfecha por las coordenadas de los puntos sobre la curva y por ningún otro punto. Esto es la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica formulado por Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede ser representada por una ecuación algebraica, entonces las reglas de álgebra se pueden usar para analizar la curva.

Como ejemplo de este tipo de problema, encontraremos la ecuación de una circunferencia con radio  $r$  y centro  $(h, k)$ . Por definición, la circunferencia es el conjunto de todos los puntos  $P(x, y)$  cuya distancia desde el centro  $C(h, k)$  es  $r$  (vea Figura 12). Por lo tanto,  $P$  está sobre la circunferencia si y sólo si  $d(P, C) = r$ . De la fórmula para distancias tenemos

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r \\ (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Eleva al cuadrado cada lado}$$

Ésta es la ecuación deseada.

### ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Una ecuación de la circunferencia con centro  $(h, k)$  y radio  $r$  es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ésta se llama **forma ordinaria** para la ecuación de la circunferencia. Si el centro de la circunferencia es el origen  $(0, 0)$ , entonces la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

### EJEMPLO 8 | Gráfica de una circunferencia

Grafiqüe cada ecuación.

(a)  $x^2 + y^2 = 25$       (b)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

**SOLUCIÓN**

- (a) Reescribiendo la ecuación como  $x^2 + y^2 = 5^2$ , vemos que ésta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Su gráfica se ilustra en la Figura 13.
- (b) Reescribiendo la ecuación como  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$ , vemos que ésta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en  $(2, -1)$ . Su gráfica se ilustra en la Figura 14.

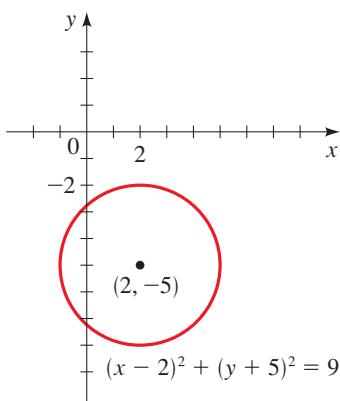


FIGURA 15

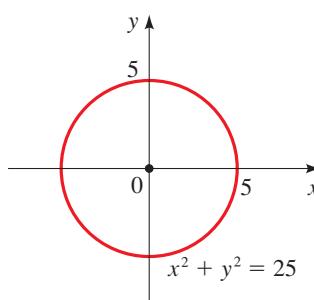


FIGURA 13

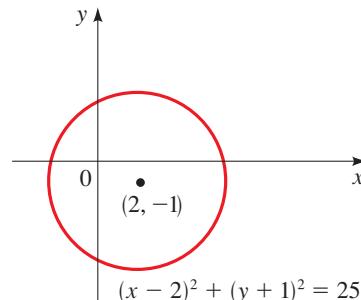


FIGURA 14

**AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 87 Y 89****EJEMPLO 9** | Hallar una ecuación de una circunferencia

- (a) Encuentre la ecuación de la circunferencia con radio 3 y centro  $(2, -5)$ .
- (b) Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene los puntos  $P(1, 8)$  y  $Q(5, -6)$  como los puntos extremos de un diámetro.

**SOLUCIÓN**

- (a) Usando la ecuación de la circunferencia con  $r = 3$ ,  $h = 2$  y  $k = -5$ , obtenemos
- $$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

La gráfica se muestra en la Figura 15.

- (b) Primero observamos que el centro es el punto medio del diámetro  $PQ$ , de modo que, por la Fórmula del Punto Medio, el centro es

$$\left( \frac{1+5}{2}, \frac{8-6}{2} \right) = (3, 1)$$

El radio  $r$  es la distancia de  $P$  al centro, y por la Fórmula para Distancias,

$$r^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 8)^2 = 2^2 + (-7)^2 = 53$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53$$

La gráfica se muestra en la Figura 16.

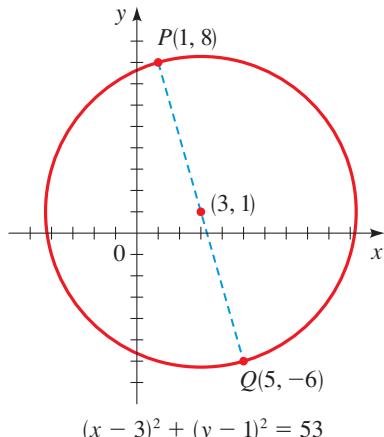


FIGURA 16

**AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 93 Y 97**

Desarrollemos la ecuación de la circunferencia del ejemplo precedente.

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53 \quad \text{Forma ordinaria}$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 53 \quad \text{Desarrolle los cuadrados}$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y = 43 \quad \text{Rreste 10 para obtener forma desarrollada}$$

Suponga que nos dan la ecuación de una circunferencia en forma desarrollada. Entonces, para hallar su centro y radio, debemos regresar la ecuación a su forma ordinaria. Eso significa que debemos invertir los pasos del cálculo precedente y, para hacerlo, necesitamos saber qué sumar a una expresión como  $x^2 - 6x$  para hacerla un cuadrado perfecto, es decir, necesitamos completar el cuadrado, como en el ejemplo siguiente.

Completar el cuadrado se usa en muchos contextos en álgebra. En la Sección 1.5 usamos completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas.

**EJEMPLO 10** | Identificar una ecuación de un círculo

Demuestre que la ecuación  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$  representa una circunferencia, y encuentre el centro y el radio.

**SOLUCIÓN** Primero agrupamos los términos en  $x$  y en  $y$ . A continuación completamos el cuadrado para  $x^2 + 2y$  al sumar  $(\frac{1}{2} \cdot 2)^2 = 1$ , y completamos el cuadrado para  $y^2 - 6y$  al sumar  $[\frac{1}{2} \cdot (-6)]^2 = 9$ .

$$(x^2 + 2x \quad) + (y^2 - 6y \quad) = -7$$

Agrupe términos

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

Complete el cuadrado al sumar 1 y 9 a cada lado

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3$$

Factorice y simplifique

🚫 Debemos agregar los mismos números a *cada lado* para mantener la igualdad.

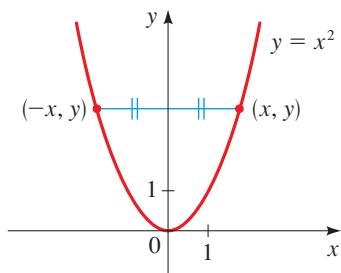


FIGURA 17

Comparando esta ecuación con la ecuación ordinaria de una circunferencia, vemos que  $h = -1$ ,  $k = 3$  y  $r = \sqrt{3}$ , de modo que la ecuación dada representa una circunferencia con centro  $(-1, 3)$  y radio  $\sqrt{3}$ .

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 103

**▼ Simetría**

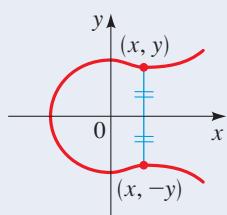
La Figura 17 muestra la gráfica de  $y = x^2$ . Nótese que la parte de la gráfica a la izquierda del eje  $y$  es la imagen espejo de la parte a la derecha del eje  $y$ . La razón es que si el punto  $(x, y)$  está en la gráfica, entonces también está  $(-x, y)$ , y estos puntos son reflexiones uno del otro respecto del eje  $y$ . En esta situación decimos que la gráfica es **simétrica con respecto a un eje**.

**DEFINICIÓN DE SIMETRÍA****Tipo de simetría****Simetría con respecto al eje  $x$** **Simetría con respecto al eje  $y$** **Simetría con respecto al origen****Cómo probar si hay simetría**

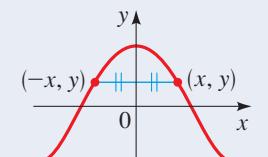
La ecuación no cambia cuando  $y$  es sustituida por  $-y$

La ecuación no cambia cuando  $x$  es sustituida por  $-x$

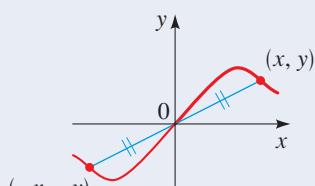
La ecuación no cambia cuando  $x$  es sustituida por  $-x$  y  $y$  por  $-y$

**Qué aspecto tiene la gráfica (figuras en esta sección)**

(Figuras 13, 18)



(Figuras 9, 10, 11, 13, 17)



(Figuras 13, 19)

**Significado geométrico**

La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje  $x$

La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje  $y$

La gráfica no cambia cuando gira 180° alrededor del origen

**pecto al eje y.** Del mismo modo, decimos que una gráfica es **simétrica con respecto al eje x** si siempre que el punto  $(x, y)$  esté en la gráfica, entonces también lo estará  $(x, -y)$ . Una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si siempre que  $(x, y)$  esté en la gráfica, también lo estará  $(-x, -y)$ .

Los ejemplos restantes de esta sección muestran cómo la simetría nos ayuda a trazar las gráficas de ecuaciones.

### EJEMPLO 11 | Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación  $x = y^2$  y trace la gráfica.

**SOLUCIÓN** Si  $y$  es sustituida por  $-y$  en la ecuación  $x = y^2$ , obtenemos

$$x = (-y)^2 \quad \text{Sustituya } y \text{ por } -y$$

$$x = y^2 \quad \text{Simplifique}$$

y por lo tanto la ecuación no cambió. En consecuencia, la gráfica es simétrica respecto al eje  $x$ . Pero cambiar  $x$  por  $-x$  da la ecuación  $-x = y^2$ , que no es la misma que la ecuación original, de modo que la gráfica no es simétrica alrededor del eje  $y$ .

Usamos la simetría respecto al eje  $x$  para trazar la gráfica al localizar primeramente los puntos justo para  $y > 0$  y a continuación reflejar la gráfica en el eje  $x$ , como se ve en la Figura 18.

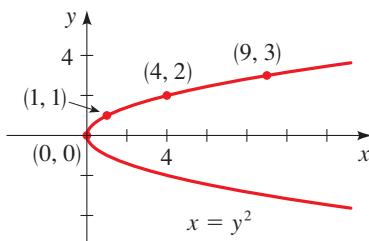


FIGURA 18

$y$	$x = y^2$	$(x, y)$
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(4, 2)
3	9	(9, 3)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 77

### EJEMPLO 12 | Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación  $y = x^3 - 9x$  y trace su gráfica.

**SOLUCIÓN** Si sustituimos  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  en la ecuación, obtenemos

$$-y = (-x)^3 - 9(-x) \quad \text{Sustituya } x \text{ por } -x \text{ y } y \text{ por } -y$$

$$-y = -x^3 + 9x \quad \text{Simplifique}$$

$$y = x^3 - 9x \quad \text{Multiplique por } -1$$

y así la ecuación no cambia. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al origen. La trazamos al localizar primero puntos para  $x > 0$  y luego usando simetría alrededor del origen (vea Figura 19).

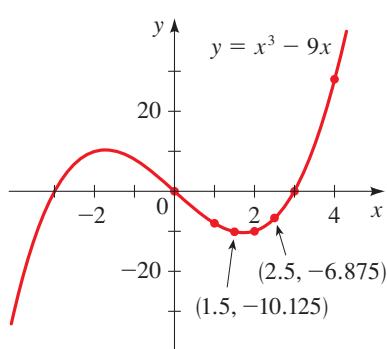


FIGURA 19

$x$	$y = x^3 - 9x$	$(x, y)$
0	0	(0, 0)
1	-8	(1, -8)
1.5	-10.125	(1.5, -10.125)
2	-10	(2, -10)
2.5	-6.875	(2.5, -6.875)
3	0	(3, 0)
4	28	(4, 28)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 79

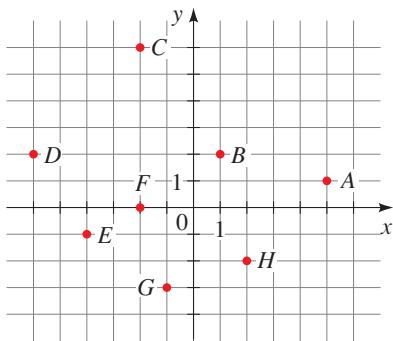
## 1.8 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- El punto que está 3 unidades a la derecha del eje  $y$  y 5 unidades abajo del eje  $x$  tiene coordenadas  $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$ .
- La distancia entre los puntos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  es  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Por lo tanto, la distancia entre  $(1, 2)$  y  $(7, 10)$  es  $\underline{\hspace{1cm}}$ .
- El punto medio entre  $(a, b)$  y  $(c, d)$  es  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Así que el punto medio entre  $(1, 2)$  y  $(7, 10)$  es  $\underline{\hspace{1cm}}$ .
- Si el punto  $(2, 3)$  está sobre la gráfica de una ecuación con  $x$  y  $y$ , entonces la ecuación se satisface cuando sustituimos  $x$  por  $\underline{\hspace{1cm}}$  y  $y$  por  $\underline{\hspace{1cm}}$ . ¿El punto  $(2, 3)$  está sobre la gráfica de la ecuación  $2y = x + 1$ ?
- (a) Para hallar el (los) punto(s) de intersección  $x$  de la gráfica de una ecuación, igualamos  $\underline{\hspace{1cm}}$  a 0 y despejamos  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Entonces, el punto de intersección  $x$  de  $2y = x + 1$  es  $\underline{\hspace{1cm}}$ .
- (b) Para hallar el (los) punto(s) de intersección  $y$  de la gráfica de una ecuación, igualamos  $\underline{\hspace{1cm}}$  a 0 y despejamos  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Entonces, el punto de intersección  $y$  de  $2y = x + 1$  es  $\underline{\hspace{1cm}}$ .
- La gráfica de la ecuación  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  es una circunferencia con centro  $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$  y radio  $\underline{\hspace{1cm}}$ .

### HABILIDADES

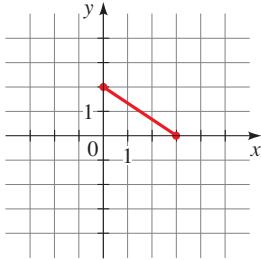
- Localice los puntos dados en un plano de coordenadas.  
 $(2, 3), (-2, 3), (4, 5), (4, -5), (-4, 5), (-4, -5)$
- Encuentre las coordenadas de los puntos mostrados en la figura.



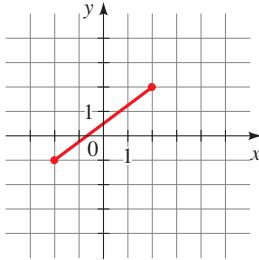
- 9-12 ■ Se grafica un par de puntos.

- Encuentre la distancia entre ellos.
- Encuentre el punto medio del segmento que los une.

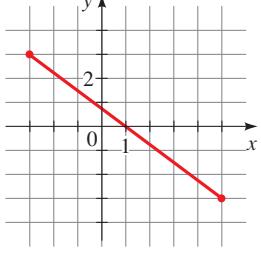
9.



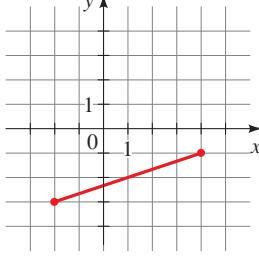
10.



11.



12.



- 13-18 ■ Se grafica un par de puntos.

- Localice los puntos en un plano de coordenadas.
- Encuentre la distancia entre ellos.
- Encuentre el punto medio del segmento que los une.

13.  $(0, 8), (6, 16)$ 14.  $(-2, 5), (10, 0)$ 15.  $(-3, -6), (4, 18)$ 16.  $(-1, -1), (9, 9)$ 17.  $(6, -2), (-6, 2)$ 18.  $(0, -6), (5, 0)$ 

19. Trace el rectángulo con vértices  $A(1, 3), B(5, 3), C(1, -3)$  y  $D(5, -3)$  en un plano de coordenadas. Encuentre el área del rectángulo.

20. Trace el paralelogramo con vértices  $A(1, 2), B(5, 2), C(3, 6)$  y  $D(7, 6)$  en un plano de coordenadas. Encuentre el área del paralelogramo.

21. Encuentre los puntos  $A(1, 0), B(5, 0), C(4, 3)$  y  $D(2, 3)$  en un plano de coordenadas. Trace los segmentos  $AB, BC, CD$  y  $DA$ . ¿Qué clase de cuadrilátero es  $ABCD$  y cuál es su área?

22. Determine los puntos  $P(5, 1), Q(0, 6)$  y  $R(-5, 1)$  en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar situado el punto  $S$  para que el cuadrilátero  $PQRS$  sea un cuadrado? Encuentre el área de este cuadrado.

- 23-32 ■ Trace la región dada por el conjunto.

23.  $\{(x, y) \mid x \geq 3\}$ 24.  $\{(x, y) \mid y < 3\}$ 25.  $\{(x, y) \mid y = 2\}$ 26.  $\{(x, y) \mid x = -1\}$ 27.  $\{(x, y) \mid 1 < x < 2\}$ 28.  $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4\}$ 29.  $\{(x, y) \mid |x| > 4\}$ 30.  $\{(x, y) \mid |y| \leq 2\}$ 31.  $\{(x, y) \mid x \geq 1 \text{ y } y < 3\}$ 32.  $\{(x, y) \mid |x| \leq 2 \text{ y } |y| \leq 3\}$

33. ¿Cuál de los puntos  $A(6, 7)$  o  $B(-5, 8)$  está más cercano al origen?

34. ¿Cuál de los puntos  $C(-6, 3)$  o  $D(3, 0)$  está más cercano al punto  $E(-2, 1)$ ?

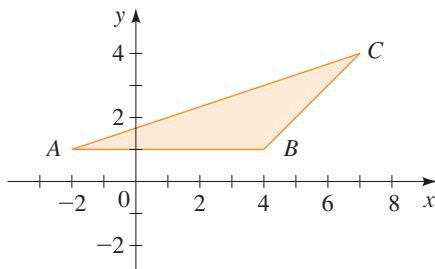
35. ¿Cuál de los puntos  $P(3, 1)$  o  $Q(-1, 3)$  está más cercano al punto  $R(-1, -1)$ ?

36. (a) Demuestre que los puntos  $(7, 3)$  y  $(3, 7)$  están a la misma distancia del origen.

(b) Demuestre que los puntos  $(a, b)$  y  $(b, a)$  están a la misma distancia del origen.

37. Demuestre que el triángulo con vértices  $A(0, 2)$ ,  $B(-3, -1)$  y  $C(-4, 3)$  es isósceles.

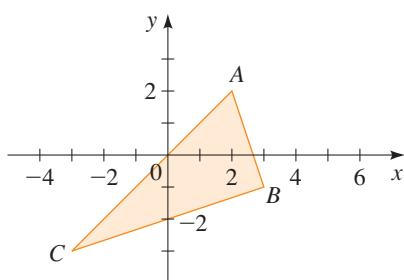
38. Encuentre el área del triángulo que se ve en la figura.



39. Consulte el triángulo  $ABC$  de la figura siguiente.

(a) Demuestre que el triángulo  $ABC$  es rectángulo, usando para ello el inverso del Teorema de Pitágoras (vea página 219).

(b) Encuentre el área del triángulo  $ABC$ .



40. Demuestre que el triángulo con vértices  $A(6, -7)$ ,  $B(11, -3)$  y  $C(2, -2)$  es rectángulo, usando el inverso del Teorema de Pitágoras. Encuentre el área del triángulo.

41. Demuestre que los puntos  $A(-2, 9)$ ,  $B(4, 6)$ ,  $C(1, 0)$  y  $D(-5, 3)$  son los vértices de un cuadrado.

42. Demuestre que los puntos  $A(-1, 3)$ ,  $B(3, 11)$  y  $C(5, 15)$  son colineales, demostrando para ello que  $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ .

43. Encuentre el punto sobre el eje  $y$  que es equidistante de los puntos  $(5, -5)$  y  $(1, 1)$ .

44. Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices  $A(1, 0)$ ,  $B(3, 6)$  y  $C(8, 2)$ . (Una *mediana* es un segmento de recta que va del vértice al punto medio del lado opuesto.)

45. Localice los puntos  $P(-1, -4)$ ,  $Q(1, 1)$  y  $R(4, 2)$  en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar situado el punto  $S$  de modo que la figura  $PQRS$  sea un paralelogramo?

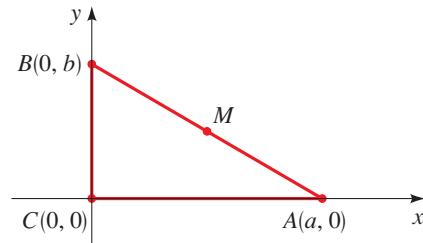
46. Si  $M(6, 8)$  es el punto medio del segmento de recta  $AB$  y si  $A$  tiene coordenadas  $(2, 3)$ , encuentre las coordenadas de  $B$ .

47. (a) Trace el paralelogramo con vértices  $A(-2, -1)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $C(7, 7)$  y  $D(1, 4)$ .

(b) Encuentre los puntos medios de las diagonales de este paralelogramo.

(c) De la parte (b) demuestre que las diagonales se bisecan entre sí.

48. El punto  $M$  en la figura siguiente es el punto medio del segmento de recta  $AB$ . Demuestre que  $M$  es equidistante de los vértices del triángulo  $ABC$ .



49-52 ■ Determine si los puntos dados están sobre la gráfica de la ecuación.

49.  $x - 2y - 1 = 0$ ;  $(0, 0), (1, 0), (-1, -1)$

50.  $y(x^2 + 1) = 1$ ;  $(1, 1), (1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$

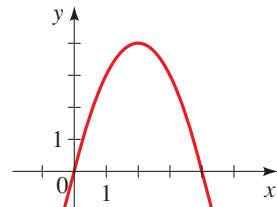
51.  $x^2 + xy + y^2 = 4$ ;  $(0, -2), (1, -2), (2, -2)$

52.  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $(0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

53-56 ■ Se da una ecuación y su gráfica. Encuentre los puntos de intersección  $x$  y  $y$ .

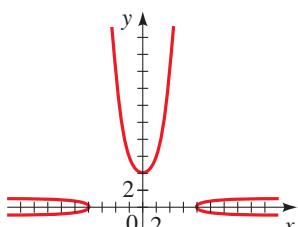
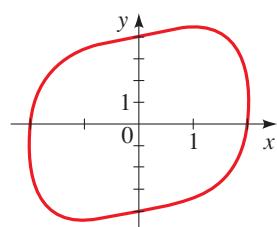
53.  $y = 4x - x^2$

54.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



55.  $x^4 + y^2 - xy = 16$

56.  $x^2 + y^3 - x^2y^2 = 64$



**57-76** ■ Haga una tabla de valores y trace la gráfica de la ecuación. Encuentre los puntos de intersección  $x$  y  $y$  y pruebe si hay simetría.

57.  $y = -x + 4$

58.  $y = 3x + 3$

59.  $2x - y = 6$

60.  $x + y = 3$

61.  $y = 1 - x^2$

62.  $y = x^2 + 2$

63.  $4y = x^2$

64.  $8y = x^3$

65.  $y = x^2 - 9$

66.  $y = 9 - x^2$

67.  $xy = 2$

68.  $y = \sqrt{x + 4}$

69.  $y = \sqrt{4 - x^2}$

70.  $y = -\sqrt{4 - x^2}$

71.  $x + y^2 = 4$

72.  $x = y^3$

73.  $y = 16 - x^4$

74.  $x = |y|$

75.  $y = 4 - |x|$

76.  $y = |4 - x|$

**77-82** ■ Pruebe si hay simetría en cada ecuación.

77.  $y = x^4 + x^2$

78.  $x = y^4 - y^2$

79.  $x^2y^2 + xy = 1$

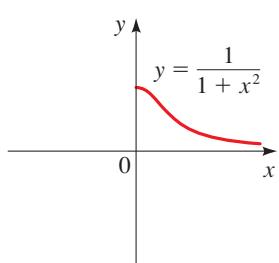
80.  $x^4y^4 + x^2y^2 = 1$

81.  $y = x^3 + 10x$

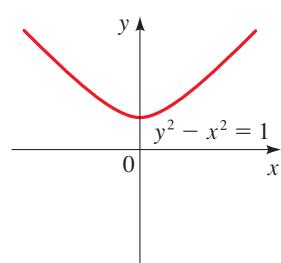
82.  $y = x^2 + |x|$

**83-86** ■ Complete la gráfica usando la propiedad de simetría dada.

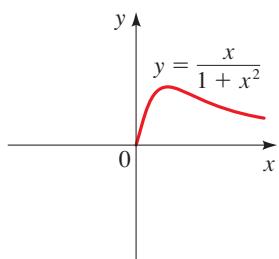
83. Simétrica con respecto al eje  $y$ .



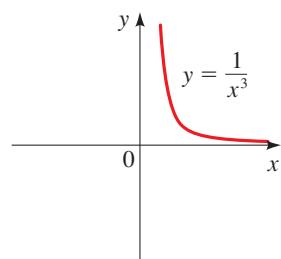
84. Simétrica con respecto al eje  $x$ .



85. Simétrica con respecto al origen.



86. Simétrica con respecto al origen.



**87-92** ■ Encuentre el centro y radio de la circunferencia y trace su gráfica.

87.  $x^2 + y^2 = 9$

88.  $x^2 + y^2 = 5$

89.  $(x - 3)^2 + y^2 = 16$

90.  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

91.  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

92.  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$

**93-100** ■ Encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

93. Centro  $(2, -1)$ ; radio 3

94. Centro  $(-1, -4)$ ; radio 8

95. Centro en el origen; pasa por  $(4, 7)$

96. Centro  $(-1, 5)$ ; pasa por  $(-4, -6)$

97. Los puntos extremos de un diámetro son  $P(-1, 1)$  y  $Q(5, 9)$

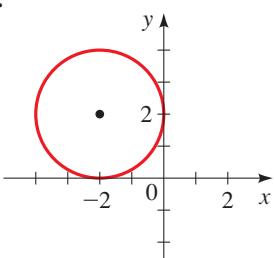
98. Los puntos extremos de un diámetro son  $P(-1, 3)$  y  $Q(7, -5)$

99. Centro  $(7, -3)$ ; tangente al eje  $x$

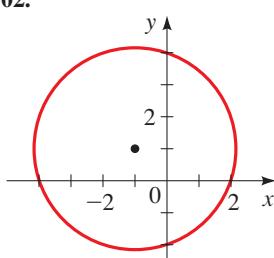
100. La circunferencia está en el primer cuadrante, tangente a los ejes  $x$  y  $y$ ; radio 5

**101-102** ■ Encuentre la ecuación de la circunferencia de la figura.

101.



102.



**103-108** ■ Demuestre que la ecuación representa una circunferencia, y encuentre el centro y radio.

103.  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

104.  $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

105.  $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}$

106.  $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$

107.  $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$

108.  $3x^2 + 3y^2 + 6x - y = 0$

**109-110** ■ Trace la región dada por el conjunto.

109.  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

110.  $\{(x, y) | x^2 + y^2 > 4\}$

111. Encuentre el área de la región que está fuera de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$  pero dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

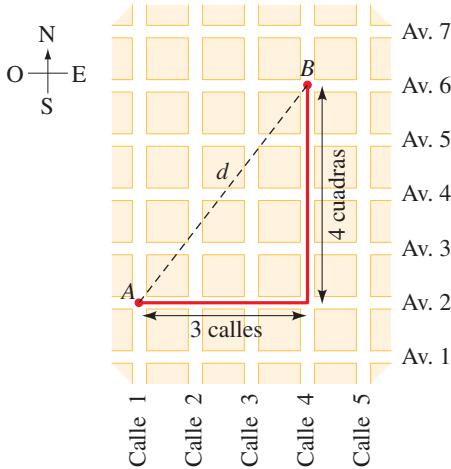
112. Trace la región del plano coordenado que satisface las desigualdades  $x^2 + y^2 \leq 9$  y  $y \geq |x|$ . ¿Cuál es el área de esta región?

## APLICACIONES

**113. Distancias en una ciudad** Una ciudad tiene calles que corren de norte a sur y avenidas que corren de oriente a poniente, todas igualmente espaciadas. Calles y avenidas están numeradas en forma secuencial, como se ve en la figura siguiente. La distancia *a pie* entre los puntos  $A$  y  $B$  es de 7 manzanas, es decir, 3 manzanas al oriente y 4 manzanas al norte. Para hallar la distancia *d en línea recta*, debemos usar la Fórmula para Distancias.

- (a) Encuentre la distancia en línea recta (en manzanas) entre  $A$  y  $B$ .

- (b) Encuentre la distancia a pie y la distancia en línea recta entre la esquina de la Calle 4 y la Avenida 2, y la esquina de la Calle 11 y la Avenida 26.
- (c) ¿Qué debe ser cierto en relación con los puntos  $P$  y  $Q$  si la distancia a pie entre  $P$  y  $Q$  es igual a la distancia en línea recta entre  $P$  y  $Q$ ?

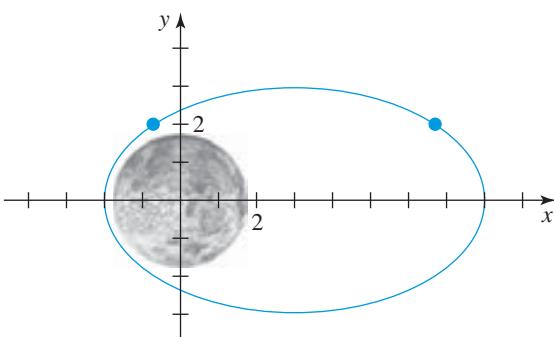


- 114. Punto medio** Dos amigos viven en la ciudad descrita en el Ejercicio 113, uno en la esquina de la Calle 3 y la Avenida 7, el otro en la esquina de la Calle 27 y la Avenida 17. Con frecuencia se ven en una cafetería que está a la mitad de distancia entre sus casas.
- (a) ¿En cuál crucero está ubicada la cafetería?
- (b) ¿Cuánto debe caminar cada uno para llegar a la cafetería?

- 115. Órbita de un satélite** Un satélite está en órbita alrededor de la Luna. Se elabora un plano de coordenadas que contiene la órbita, con el centro de la Luna en el origen como se muestra en la gráfica, con distancias medidas en megametros (Mm). La ecuación de la órbita del satélite es

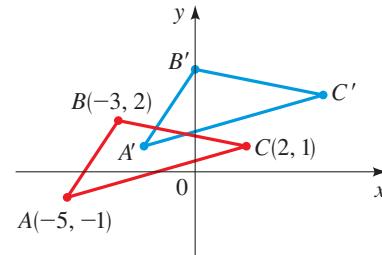
$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- (a) De la gráfica, determine el punto más cercano y el más lejano que el satélite llega al centro de la Luna.
- (b) Hay dos puntos en la órbita con coordenadas  $y = 2$ . Encuentre las coordenadas  $x$  de estos puntos y determine sus distancias al centro de la Luna.

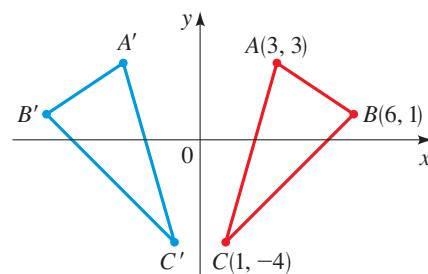


## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

- 116. Desplazar el plano de coordenadas** Suponga que cada uno de los puntos del plano de coordenadas se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.
- (a) ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto  $(5, 3)$ ?
- (b) ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto  $(a, b)$ ?
- (c) ¿Cuál punto se desplaza a  $(3, 4)$ ?
- (d) El triángulo  $ABC$  de la figura ha sido desplazado al triángulo  $A'B'C'$ . Encuentre las coordenadas de los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .



- 117. Reflejo en el plano de coordenadas** Suponga que el eje  $y$  actúa como espejo que refleja cada punto a la derecha del mismo hacia un punto a su izquierda.
- (a) ¿A qué punto se refleja el punto  $(3, 7)$ ?
- (b) ¿A qué punto se refleja el punto  $(a, b)$ ?
- (c) ¿Cuál punto se refleja al  $(-4, -1)$ ?
- (d) El triángulo  $ABC$  de la figura se refleja al triángulo  $A'B'C'$ . Encuentre las coordenadas de los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .



- 118. Completar el segmento de recta** Localice los puntos  $M(6, 8)$  y  $A(2, 3)$  en un plano de coordenadas. Si  $M$  es el punto medio del segmento de recta  $AB$ , encuentre las coordenadas de  $B$ . Escriba una breve descripción de los pasos que tomó para hallar  $B$ , así como sus razones para tomarlos.

- 119. Completar un paralelogramo** Localice los puntos  $P(0, 3)$ ,  $Q(2, 2)$  y  $R(5, 3)$  en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar ubicado el punto  $S$  para que la figura  $PQRS$  sea un paralelogramo? Escriba una breve descripción de los pasos que tomó para hallar  $B$ , así como sus razones para tomarlos.

- 120. Circunferencia, punto o conjunto vacío?** Complete los cuadrados en la ecuación general  $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$  y simplifique el resultado cuanto sea posible. ¿Bajo qué condiciones esta ecuación representa una circunferencia en los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ ? ¿Un solo punto? ¿El conjunto vacío? En el caso en que la ecuación represente una circunferencia, encuentre su centro y radio.

### 121. ¿Las circunferencias se intersecan?

- (a) Encuentre el radio de cada circunferencia del par y la distancia entre sus centros; a continuación use esta información para determinar si las circunferencias se intersecan.

(i)  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ;  
 $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$

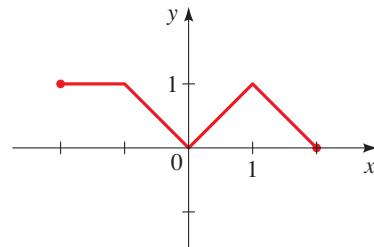
(ii)  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ;  
 $(x - 5)^2 + (y - 14)^2 = 9$

(iii)  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 1$ ;  
 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$

- (b) ¿Cómo se puede averiguar, con sólo saber los radios de dos circunferencias y la distancia entre sus centros, si las circunferencias se intersecan? Escriba un breve párrafo que describa cómo se determina esto y trace gráficas para ilustrar su respuesta.

- 122. Hacer una gráfica simétrica** La gráfica que se muestra en la figura no es simétrica alrededor del eje  $x$ , el eje  $y$  o el origen. Agregue más segmentos de recta a la gráfica para que muestre la simetría indicada. En cada caso, agregue tan poco como sea posible.

- (a) Simetría alrededor del eje  $x$   
(b) Simetría alrededor del eje  $y$   
(c) Simetría alrededor del origen



## 1.9 CALCULADORAS GRAFICADORAS; RESOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES



Uso de una calculadora graficadora ► Resolver ecuaciones gráficamente  
 ► Resolver desigualdades gráficamente

En las Secciones 1.5 y 1.7 resolvimos ecuaciones y desigualdades algebraicamente. En la Sección 1.8 aprendimos a trazar la gráfica de una ecuación en un plano de coordenadas. En esta sección usamos gráficas para resolver ecuaciones y desigualdades. Para hacer esto, debemos primero trazar una gráfica usando una calculadora graficadora. Por lo tanto empezamos por dar unas pocas guías para ayudarnos a usar con eficiencia una calculadora graficadora.

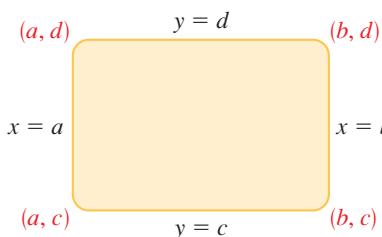
### ▼ Uso de una calculadora graficadora

Una calculadora graficadora o computadora exhibe una parte rectangular de la gráfica en una pantalla que llamamos **rectángulo de vista**. Es frecuente que la pantalla predeterminada dé una imagen incompleta o confusa, de modo que es importante escoger cuidadosamente un rectángulo de vista. Si escogemos que los valores  $x$  varíen de un valor mínimo de  $X_{\min} = a$  a un valor máximo de  $X_{\max} = b$  y los valores  $y$  varíen de un valor mínimo de  $Y_{\min} = c$  a un valor máximo de  $Y_{\max} = d$ , entonces la parte exhibida de la gráfica está en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

como se muestra en la Figura 1. Nos referimos a éste como el rectángulo de vista  $[a, b]$  por  $[c, d]$ .

La calculadora graficadora traza la gráfica de una ecuación en una forma muy semejante a como lo haríamos nosotros. Determina los puntos de la forma  $(x, y)$  para cierto número de valores de  $x$ , espaciados igualmente entre  $a$  y  $b$ . Si la ecuación no está definida para un valor  $x$  o si el valor  $y$  correspondiente está fuera del rectángulo de vista, la calculadora ignora este valor y continúa con el siguiente valor  $x$ . La máquina conecta cada punto al punto localizado precedente para formar una representación de la gráfica de la ecuación.



**FIGURA 1** Rectángulo de vista  $[a, b]$  por  $[c, d]$

### EJEMPLO 1 | Escoger un rectángulo de vista apropiado

Grafique la ecuación  $y = x^2 + 3$  en un rectángulo de vista apropiado.

**SOLUCIÓN** Experimentemos con diferentes rectángulos de vista. Empezamos con el rectángulo de vista  $[-2, 2]$  por  $[2, 2]$ , de modo que hacemos

$$x_{\min} = -2 \qquad y_{\min} = -2$$

$$x_{\max} = 2 \qquad y_{\max} = 2$$

La gráfica resultante de la Figura 2(a) estaría en blanco, porque  $x^2 \geq 0$ , de modo que  $x^2 + 3 \geq 3$  para toda  $x$ . Entonces, la gráfica está enteramente por arriba del rectángulo de vista y por ello no es apropiado. Si aumentamos el rectángulo de vista a  $[-4, 4]$  por  $[-4, 4]$ , como se ve en la Figura 2(b), empezamos a ver parte de la gráfica.

Probemos ahora con el rectángulo de vista  $[-10, 10]$  por  $[-5, 30]$ . La gráfica de la Figura 2(c) parece dar una vista más completa de la gráfica. Si agrandamos aún más el rectángulo de vista, como en la Figura 2(d), la gráfica no muestra con claridad que el punto de intersección y es 3.

Entonces el rectángulo de vista  $[-10, 10]$  por  $[-5, 30]$  da una representación apropiada de la gráfica.

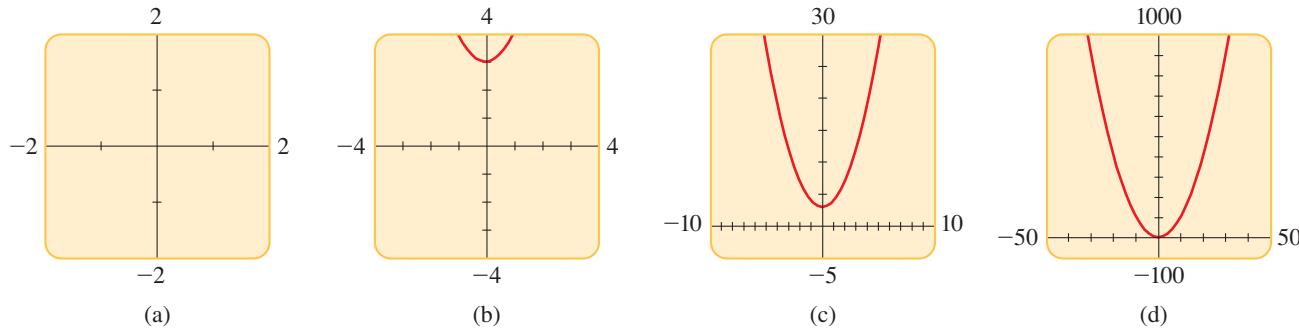


FIGURA 2 Gráficas de  $y = x^2 + 3$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

**EJEMPLO 2 | Dos gráficas en la misma pantalla**

Grafique las ecuaciones  $y = 3x^2 - 6x + 1$  y  $y = 0.23x - 2.25$  juntas en el rectángulo de vista  $[-1, 3]$  por  $[-2.5, 1.5]$ . ¿Las gráficas se intersecan en el rectángulo de vista?

**SOLUCIÓN** La Figura 3(a) muestra las características esenciales de ambas gráficas. Una de ellas es una parábola y la otra es una recta. Se ve como si las gráficas se cruzaran cerca del punto  $(1, -2)$  pero, si hacemos acercamientos con el zoom en el área alrededor de este punto, como se muestra en la Figura 3(b), vemos que, aunque las gráficas casi se tocan, en realidad no se cruzan.

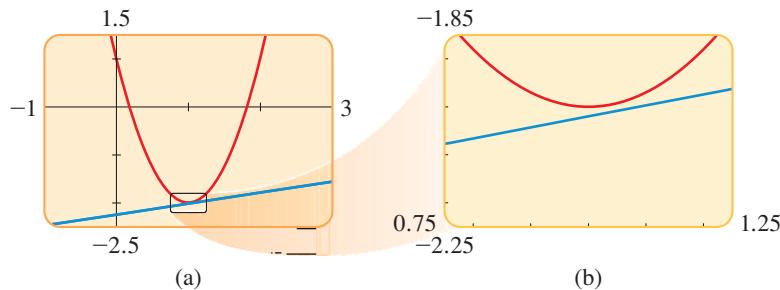


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

De los Ejemplos 1 y 2 se puede ver que la selección de un rectángulo de vista hace la gran diferencia en el aspecto de una gráfica. Si se desea una vista general de las características esenciales de una gráfica, se debe escoger un rectángulo de vista relativamente grande para obtener una vista global de la gráfica; si se desea investigar los detalles de una gráfica, se debe activar el zoom en un rectángulo de vista pequeño que muestre sólo la característica de interés.

Casi todas las calculadoras graficadoras sólo pueden graficar ecuaciones en las que  $y$  está aislada en un lado del signo igual. El siguiente ejemplo muestra cómo graficar ecuaciones que no tienen esta propiedad.

### EJEMPLO 3 | Graficar una circunferencia

Grafique la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .

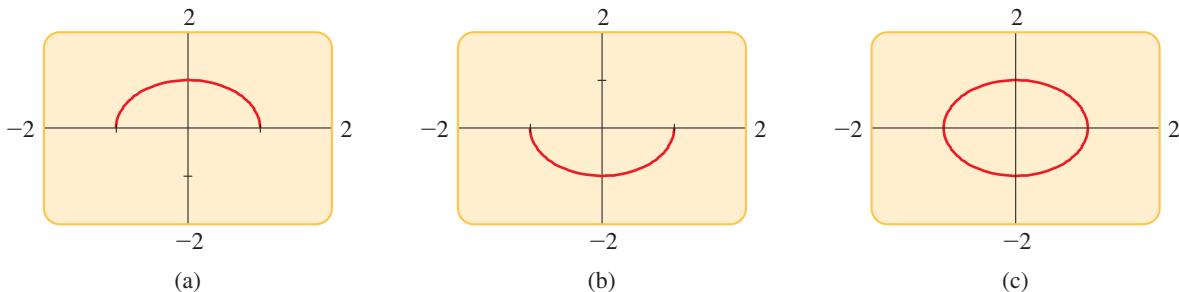
**SOLUCIÓN** Primero debemos despejar  $y$  para aislarla en un lado del signo igual.

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - x^2 && \text{Reste } x^2 \\ y &= \pm \sqrt{1 - x^2} && \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la circunferencia está descrita por las gráficas de *dos* ecuaciones:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

La primera ecuación representa la mitad superior de la circunferencia (porque  $y \geq 0$ ), y la segunda representa la mitad inferior de la circunferencia (porque  $y \leq 0$ ). Si graficamos la primera ecuación en el rectángulo de vista  $[-2, 2]$  por  $[-2, 2]$ , obtenemos la semicircunferencia de la Figura 4(a). La gráfica de la segunda ecuación es la semicircunferencia de la Figura 4(b). Graficando estas semicircunferencias juntas en la misma pantalla de vista, obtenemos la circunferencia completa de la Figura 4(c).



**FIGURA 4** Gráfica de la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

### ▼ Resolver ecuaciones gráficamente

En la Sección 1.5 aprendimos a resolver ecuaciones. Para resolver una ecuación como

$$3x - 5 = 0$$

usamos el **método algebraico**. Esto significa que empleamos las reglas de álgebra para aislar  $x$  en un lado de la ecuación. Vemos  $x$  como una *incógnita* y usamos las reglas de álgebra para acorralarla. A continuación veamos los pasos en la solución:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 0 \\ 3x &= 5 && \text{Sume 5} \\ x &= \frac{5}{3} && \text{Divida entre 3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es  $x = \frac{5}{3}$ .

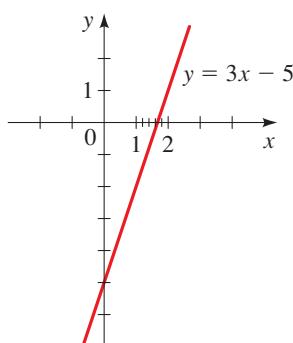


FIGURA 5

También podemos resolver esta ecuación por el **método gráfico**. En este método vemos  $x$  como una *variable* y trazamos la gráfica de la ecuación

$$y = 3x - 5$$

Diferentes valores de  $x$  dan diferentes valores de  $y$ . Nuestro objetivo es hallar el valor de  $x$  para el cual  $y = 0$ . De la gráfica de la Figura 5 vemos que  $y = 0$  cuando  $x \approx 1.7$ . Entonces, la solución es  $x \approx 1.7$ . Observe que de la gráfica obtenemos una solución apropiada. En el cuadro siguiente resumimos estos métodos.

### RESOLVER UNA ECUACIÓN

#### Método algebraico

Use las reglas del álgebra para aislar la incógnita  $x$  en un lado de la ecuación.

**Ejemplo:**  $2x = 6 - x$

$$3x = 6 \quad \text{Sume } x$$

$$x = 2 \quad \text{Divida entre 3}$$

La solución es  $x = 2$ .

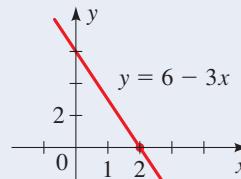
#### Método gráfico

Pase todos los términos a un lado y haga  $y = 0$ . Trace la gráfica para hallar el valor de  $x$  donde  $y = 0$ .

**Ejemplo:**  $2x = 6 - x$

$$0 = 6 - 3x$$

Haga  $y = 6 - 3x$  y grafique.



De la gráfica, la solución es  $x \approx 2$ .

La ventaja del método algebraico es que da respuestas exactas. También, el proceso de desenmarañar la ecuación para llegar a la respuesta nos ayuda a entender la estructura algebraica de la ecuación. Por otra parte, para muchas ecuaciones es difícil o imposible aislar  $x$ .

El método gráfico da una aproximación numérica a la respuesta. Ésta es una ventaja cuando se desea una respuesta numérica. (Por ejemplo, un ingeniero podría hallar una respuesta expresada como  $x \approx 2.6$  más útil inmediatamente que  $x = \sqrt[3]{7}$ .) Del mismo modo, graficar una ecuación nos ayuda a visualizar la forma en que la solución está relacionada a otros valores de la variable.

El *Proyecto de descubrimiento* de la página 263 describe un método numérico para resolver ecuaciones.



© Bettman/CORBIS

**PIERRE DE FERMAT** (1601–1665) fue un matemático francés que se interesó en matemáticas a la edad de 30 años. Debido a su trabajo como magistrado, Fermat tenía poco tiempo para escribir demostraciones completas de sus descubrimientos y con frecuencia los escribía en el margen de cualquier libro que estuviera leyendo. Después de su muerte, se encontró que su ejemplar del libro *Arithmetica* de Diofante (vea página 20) contenía un comentario particularmente tentador.

Donde Diofante discute las soluciones de  $x^2 + y^2 = z^2$  (por ejemplo,

$x = 3, y = 4$  y  $z = 5$ ), Fermat dice en el margen que para  $n \geq 3$  no hay soluciones numéricas naturales a la ecuación  $x^n + y^n = z^n$ . En otras palabras, es imposible que un cubo sea igual a la suma de dos cubos, que una cuarta potencia sea igual a la suma de dos potencias a la cuarta, y así sucesivamente. Fermat escribe, “he descubierto una demostración en verdad maravillosa para esto pero el margen es demasiado pequeño para contenerla”. Todos los otros comentarios del margen del ejemplar de *Arithmetica* de Fermat han sido demostrados. Éste, sin embargo, quedó sin demostración y pasó a conocerse como “Último Teorema de Fermat”.

En 1994, Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, anunció una demostración del Último Teorema de Fermat, asombroso lapso de 350 años después de su conjectura. Su demostración es uno de los resultados matemáticos más ampliamente reportados en la prensa popular.

## EJEMPLO 4 | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación cuadrática

Resuelva algebraica y gráficamente las ecuaciones cuadráticas.

(a)  $x^2 - 4x + 2 = 0$       (b)  $x^2 - 4x + 4 = 0$       (c)  $x^2 - 4x + 6 = 0$

### SOLUCIÓN 1: Algebraica

Usamos la Fórmula Cuadrática para resolver cada ecuación.

(a)  $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

Hay dos soluciones,  $x = 2 + \sqrt{2}$  y  $x = 2 - \sqrt{2}$

(b)  $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$

Hay una sola solución,  $x = 2$ .

(c)  $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$

No hay solución real.

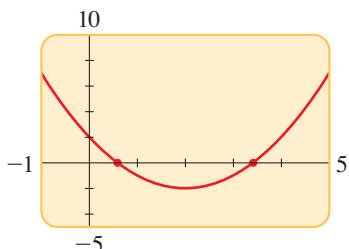
### SOLUCIÓN 2: Gráfica

Graficamos las ecuaciones  $y = x^2 - 4x + 2$ ,  $y = x^2 - 4x + 4$  y  $y = x^2 - 4x + 6$  en la Figura 6. Al determinar los puntos de intersección  $x$  de las gráficas, encontramos las siguientes soluciones.

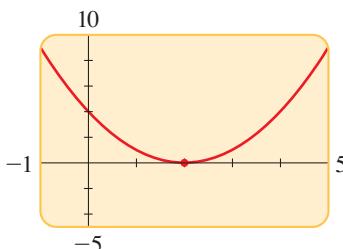
(a)  $x \approx 0.6$  y  $x \approx 3.4$

(b)  $x = 2$

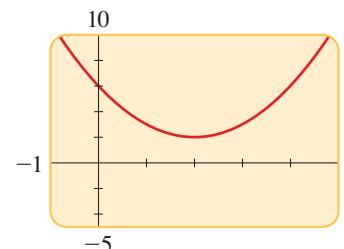
(c) No hay intersección con  $x$ , de modo que la ecuación no tiene solución.



(a)  $y = x^2 - 4x + 2$



(b)  $y = x^2 - 4x + 4$



(c)  $y = x^2 - 4x + 6$

FIGURA 6

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35



© National Portrait Gallery

**ALAN TURING** (1912–1954) estuvo en el centro de dos eventos cruciales: la Segunda Guerra Mundial y la invención de computadoras. A la edad de 23 años, Turing hizo su hazaña en matemáticas al resolver un importante problema en los círculos de matemáticas que habían sido planteados por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1928 (vea página 683). En esta investigación inventó una máquina teórica, ahora llamada máquina de Turing, que fue la inspiración para las moder-

nas computadoras digitales. Durante la Segunda Guerra Mundial, Turing estuvo a cargo del trabajo inglés de descifrar códigos secretos alemanes. Su éxito completo en ese esfuerzo desempeñó una función decisiva en la victoria de los Aliados. Para realizar los numerosos pasos lógicos que se requieren para descifrar un mensaje codificado, Turing ideó procedimientos de decisión semejantes a los modernos programas de computadora. Después de la guerra ayudó a perfeccionar las primeras computadoras electrónicas en Gran Bretaña. También ejecutó trabajos pioneros sobre inteligencia artificial y modelos de computadora para procesos biológicos. A la edad de 42 años, Turing murió envenenado por comer una manzana que misteriosamente había sido rociada con cianuro.

Las gráficas de la Figura 6 muestran visualmente por qué una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones, una solución o ninguna solución real. Demostramos este hecho algebraicamente en la Sección 1.5 cuando estudiamos el discriminante.

### EJEMPLO 5 | Otro método gráfico

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación:  $5 - 3x = 8x - 20$

#### SOLUCIÓN 1: Algebraica

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 8x - 20 \\ -3x &= 8x - 25 && \text{Reste } 15 \\ -11x &= -25 && \text{Reste } 8x \\ x &= \frac{-25}{-11} = 2\frac{3}{11} && \text{Divida entre } -11 \text{ y simplifique} \end{aligned}$$

#### SOLUCIÓN 2: Gráfica

Podríamos pasar todos los términos a un lado del signo igual, igualar a y el resultado y graficar la ecuación resultante. Pero, para evitar toda esta álgebra, graficamos dos ecuaciones:

$$y_1 = 5 - 3x \quad y \quad y_2 = 8x - 20$$

La solución de la ecuación original será el valor de  $x$  que hace  $y_1$ , es decir, la solución es la coordenada  $x$  del punto de intersección de las dos gráficas. Usando la función **TRACE** o el comando **intersect** en una calculadora graficadora, vemos de la Figura 7 que la solución es  $x \approx 2.27$ .

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

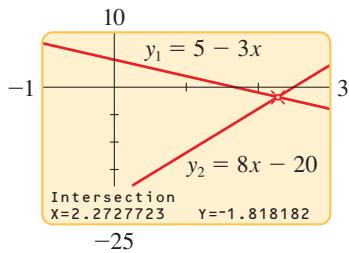


FIGURA 7

En el siguiente ejemplo usamos el método gráfico para resolver una ecuación que es extremadamente difícil de resolver con álgebra.

### EJEMPLO 6 | Resolver una ecuación en un intervalo

Resuelva la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

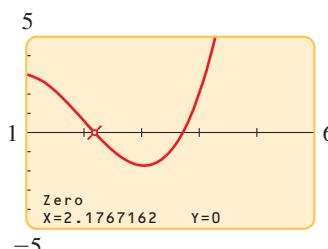
en el intervalo  $[1, 6]$ .

**SOLUCIÓN** Nos piden hallar todas las soluciones  $x$  que satisfagan  $1 \leq x \leq 6$ , por lo cual graficaremos la ecuación en un rectángulo de vista para el cual los valores  $x$  están restringidos a este intervalo.

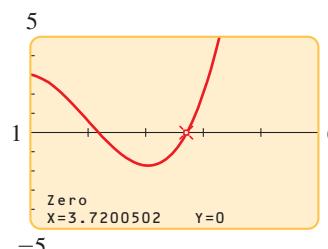
$$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x} = 0 \quad \text{Reste } \sqrt{x}$$

La Figura 8 muestra la gráfica de la ecuación  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x}$  en el rectángulo de vista  $[1, 6]$  por  $[5, 5]$ . Hay dos puntos de intersección  $x$  en este rectángulo de vista; haciendo acercamiento, vemos que las soluciones son  $x \approx 2.18$  y  $x \approx 3.72$ .



(a)



(b)

FIGURA 8

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 43

La ecuación del Ejemplo 6 en realidad tiene cuatro soluciones. Nos piden hallar las otras dos en el Ejercicio 71.

### EJEMPLO 7 | Intensidad de luz

Dos fuentes luminosas están a 10 m entre sí. Una de ellas es tres veces más intensa que la otra. La intensidad luminosa  $L$  (en lux) en un punto a  $x$  metros de la fuente más débil está dada por

$$L = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2}$$

(Vea Figura 9.) Encuentre los puntos en los que la intensidad de luz es de 4 lux.

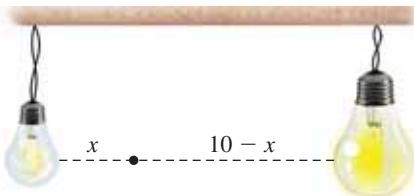


FIGURA 9

**SOLUCIÓN** Necesitamos resolver la ecuación

$$4 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2}$$

Las gráficas de

$$y_1 = 4 \quad y \quad y_2 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2}$$

se muestran en la Figura 10. Si activamos el zoom (o el comando `intersect`), encontramos dos soluciones,  $x \approx 1.67431$  y  $x \approx 7.1927193$ . Por lo tanto, la intensidad es de 4 lux en los puntos que están a 1.67 m y 7.19 m de la fuente más débil.

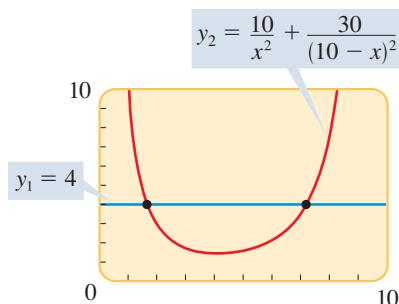


FIGURA 10

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 73

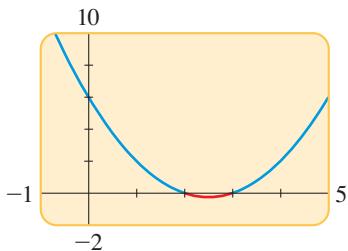


FIGURA 11  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

### ▼ Resolver desigualdades gráficamente

Las desigualdades se pueden resolver gráficamente. Para describir el método, resolvemos

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Esta desigualdad fue resuelta algebraicamente en el Ejemplo 3 de la Sección 1.7. Para resolver la desigualdad gráficamente, trazamos la gráfica de

$$y = x^2 - 5x + 6$$

Nuestro objetivo es hallar los valores de  $x$  para los cuales  $y \leq 0$ . Éstos son simplemente los valores de  $x$  para los que la gráfica se encuentra abajo del eje  $x$ . De la Figura 11 vemos que la solución de la desigualdad es el intervalo  $[2, 3]$ .

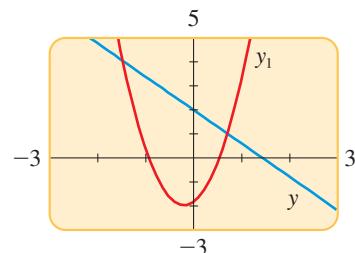
**EJEMPLO 8** | Resolver una desigualdad gráficamente

Resuelva la desigualdad  $3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \leq 2.0 - 1.4x$ .

**SOLUCIÓN** Graficamos las ecuaciones

$$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \quad y \quad y_2 = 2.0 - 1.4x$$

en el mismo rectángulo de vista de la Figura 12. Estamos interesados en aquellos valores de  $x$  para los que  $y_1 \leq y_2$ ; éstos son puntos para los que la gráfica de  $y_2$  está sobre o arriba de la gráfica de  $y_1$ . Para determinar el intervalo apropiado, buscamos las coordenadas  $x$  de puntos donde se cruzan las gráficas. Concluimos que la solución es (aproximadamente) el intervalo  $[-1.45, 0.72]$ .



**FIGURA 12**

$$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9$$

$$y_2 = 2.0 - 1.4x$$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 59

**EJEMPLO 9** | Resolver una desigualdad gráficamente

Resuelva la desigualdad  $x^3 - 5x^2 \geq -8$ .

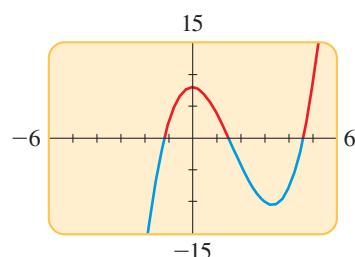
**SOLUCIÓN** Escribimos la desigualdad como

$$x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$$

y luego graficamos la ecuación

$$y = x^3 - 5x^2 + 8$$

en el rectángulo de vista  $[-6, 6]$  por  $[-15, 15]$ , como se ve en la Figura 13. La solución de la desigualdad está formada por estos intervalos en los que la gráfica está sobre o arriba del eje  $x$ . Moviendo el cursor a los puntos de intersección  $x$ , encontramos que, redondeada a un lugar decimal, la solución es  $[-1.1, 1.5] \cup [4.6, \infty)$ .



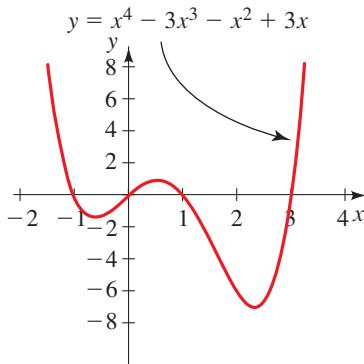
**FIGURA 13**  $x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 61

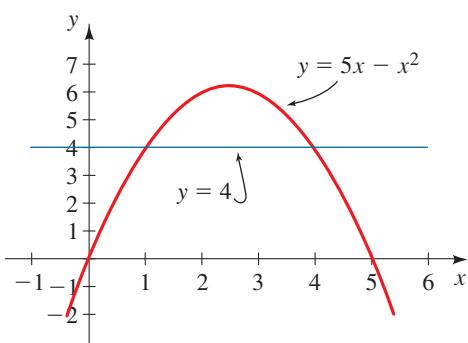
## 1.9 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- Las soluciones de la ecuación  $x^2 - 2x - 3 = 0$  son los puntos de intersección \_\_\_ de la gráfica de  $y = x^2 - 2x - 3$ .
- Las soluciones de la ecuación  $x^2 - 2x - 3 > 0$  son las coordenadas  $x$  de los puntos sobre la gráfica de  $y = x^2 - 2x - 3$  que están \_\_\_ del eje  $x$ .
- La figura muestra una gráfica de  $y = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$ . Use la gráfica para hacer lo siguiente.
  - Hallar las soluciones de la ecuación  $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0$ .
  - Hallar las soluciones de la desigualdad  $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x \leq 0$ .



- La figura siguiente muestra las gráficas de  $y = 5x - x^2$  y  $y = 4$ . Use las gráficas para hacer lo siguiente.
  - Hallar las soluciones de la ecuación  $5x - x^2 = 4$ .
  - Hallar las soluciones de la desigualdad  $5x - x^2 > 4$ .



### HABILIDADES

- 5-10** ■ Use calculadora graficadora o computadora para determinar cuál rectángulo de vista (a)–(d) produce la gráfica más apropiada de la ecuación.

5.  $y = x^4 + 2$

- $[-2, 2]$  por  $[-2, 2]$
- $[0, 4]$  por  $[0, 4]$
- $[-8, 8]$  por  $[-4, 40]$
- $[-40, 40]$  por  $[-80, 800]$

- $y = x^2 + 7x + 6$ 
    - $[-5, 5]$  por  $[-5, 5]$
    - $[0, 10]$  por  $[-20, 100]$
    - $[-15, 8]$  por  $[-20, 100]$
    - $[-10, 3]$  por  $[-100, 20]$
  - $y = 100 - x^2$ 
    - $[-4, 4]$  por  $[-4, 4]$
    - $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$
    - $[-15, 15]$  por  $[-30, 110]$
    - $[-4, 4]$  por  $[-30, 110]$
  - $y = 2x^2 - 1000$ 
    - $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$
    - $[-10, 10]$  por  $[-100, 100]$
    - $[-10, 10]$  por  $[-1000, 1000]$
    - $[-25, 25]$  por  $[-1200, 200]$
  - $y = 10 + 25x - x^3$ 
    - $[-4, 4]$  por  $[-4, 4]$
    - $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$
    - $[-20, 20]$  por  $[-100, 100]$
    - $[-100, 100]$  por  $[-200, 200]$
  - $y = \sqrt{8x - x^2}$ 
    - $[-4, 4]$  por  $[-4, 4]$
    - $[-5, 5]$  por  $[0, 100]$
    - $[-10, 10]$  por  $[-10, 40]$
    - $[-2, 10]$  por  $[-2, 6]$
- 11-22** ■ Determine un rectángulo de vista apropiado para la ecuación, y úselo para trazar la gráfica.
- $y = 100x^2$
  - $y = -100x^2$
  - $y = 4 + 6x - x^2$
  - $y = 0.3x^2 + 1.7x - 3$
  - $y = \sqrt[4]{256 - x^2}$
  - $y = \sqrt{12x - 17}$
  - $y = 0.01x^3 - x^2 + 5$
  - $y = x(x + 6)(x - 9)$
  - $y = x^4 - 4x^3$
  - $y = \frac{x}{x^2 + 25}$
  - $y = 1 + |x - 1|$
  - $y = 2x - |x^2 - 5|$
- 23-26** ■ ¿Las gráficas se cruzan en el rectángulo de vista dado? Si se cruzan, ¿cuántos puntos de intersección hay ahí?
- $y = -3x^2 + 6x - \frac{1}{2}$ ,  $y = \sqrt{7 - \frac{7}{12}x^2}$ ;  $[-4, 4]$  por  $[-1, 3]$
  - $y = \sqrt{49 - x^2}$ ,  $y = \frac{1}{5}(41 - 3x)$ ;  $[-8, 8]$  por  $[-1, 8]$
  - $y = 6 - 4x - x^2$ ,  $y = 3x + 18$ ;  $[-6, 2]$  por  $[-5, 20]$
  - $y = x^3 - 4x$ ,  $y = x + 5$ ;  $[-4, 4]$  por  $[-15, 15]$
- 27** Grafique la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$  despejando  $y$  y graficando dos ecuaciones como en el Ejemplo 3.
- 28** Grafique la circunferencia  $(y - 1)^2 + x^2 = 1$  despejando  $y$  y graficando dos ecuaciones como en el Ejemplo 3.
- 29** Grafique la ecuación  $4x^2 + 2y^2 = 1$  despejando  $y$  y graficando dos ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas negativa y positiva. (Esta gráfica se llama *elipse*.)

30. Grafique la ecuación  $y^2 - 9x = 1$  despejando  $y$  y graficando las dos ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas positiva y negativa. (Esta gráfica se llama *hipérbola*.)

31-42 ■ Resuelva la ecuación tanto algebraica como gráficamente.

31.  $x - 4 = 5x + 12$

32.  $\frac{1}{2}x - 3 = 6 + 2x$

33.  $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 7$

34.  $\frac{4}{x+2} - \frac{6}{2x} = \frac{5}{2x+4}$

35.  $x^2 - 32 = 0$

36.  $x^3 + 16 = 0$

37.  $x^2 + 9 = 0$

38.  $x^2 + 3 = 2x$

39.  $16x^4 = 625$

40.  $2x^5 - 243 = 0$

41.  $(x - 5)^4 - 80 = 0$

42.  $6(x + 2)^5 = 64$

43-50 ■ Resuelva la ecuación gráficamente en el intervalo dado. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

43.  $x^2 - 7x + 12 = 0$ ;  $[0, 6]$

44.  $x^2 - 0.75x + 0.125 = 0$ ;  $[-2, 2]$

45.  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ;  $[-1, 4]$

46.  $16x^3 + 16x^2 = x + 1$ ;  $[-2, 2]$

47.  $x - \sqrt{x+1} = 0$ ;  $[-1, 5]$

48.  $1 + \sqrt{x} = \sqrt{1 + x^2}$ ;  $[-1, 5]$

49.  $x^{1/3} - x = 0$ ;  $[-3, 3]$

50.  $x^{1/2} + x^{1/3} - x = 0$ ;  $[-1, 5]$

51-54 ■ Use el método gráfico para resolver la ecuación en el ejercicio indicado de la Sección 1.5.

51. Ejercicio 91

52. Ejercicio 92

53. Ejercicio 97

54. Ejercicio 98

55-58 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

55.  $x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$

56.  $x^4 - 8x^2 + 2 = 0$

57.  $x(x - 1)(x + 2) = \frac{1}{6}x$

58.  $x^4 = 16 - x^3$

59-66 ■ Encuentre las soluciones de la desigualdad al trazar gráficas apropiadas. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

59.  $x^2 \leq 3x + 10$

60.  $0.5x^2 + 0.875x \leq 0.25$

61.  $x^3 + 11x \leq 6x^2 + 6$

62.  $16x^3 + 24x^2 > -9x - 1$

63.  $x^{1/3} < x$

64.  $\sqrt{0.5x^2 + 1} \leq 2|x|$

65.  $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$

66.  $(x + 1)^2 \leq x^3$

67-70 ■ Use el método gráfico para resolver la desigualdad en el ejercicio indicado de la Sección 1.7.

67. Ejercicio 43

68. Ejercicio 44

69. Ejercicio 53

70. Ejercicio 54

71. En el Ejemplo 6 encontramos dos soluciones de la ecuación  $x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$ , las soluciones que están entre 1 y 6. Encuentre dos soluciones más, correctas a dos lugares decimales.

## APLICACIONES

72. **Estimación de utilidades** Un fabricante de aparatos electrodomésticos estima que las utilidades  $y$  (en dólares) generadas al producir  $x$  ollas al mes están dadas por la ecuación

$$y = 10x + 0.5x^2 - 0.001x^3 - 5000$$

donde  $0 \leq x \leq 450$ .

(a) Grafique la ecuación.

(b) ¿Cuántas ollas se tienen que fabricar para empezar a tener ganancias?

(c) ¿Para qué valores de  $x$  la ganancia de la compañía es mayor que 15,000 dólares?

73. **¿A qué distancia puede usted ver?** Si una persona está de pie en un barco en un mar en calma, entonces su estatura  $x$  (en pies) sobre el nivel del mar está relacionada con la distancia más lejana  $y$  (en millas) que puede ver, con la ecuación

$$y = \sqrt{1.5x + \left(\frac{x}{5280}\right)^2}$$

(a) Grafique la ecuación para  $0 \leq x \leq 100$ .

(b) ¿A qué altura debe estar para poder ver a 100 millas?



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

74. **Gráficas engañosas** Escriba un breve ensayo que describa las diferentes formas en las que una calculadora graficadora puede dar una gráfica engañososa de una ecuación.

75. **Métodos de solución algebraicos y gráficos** Escriba un breve ensayo que compare los métodos algebraico y gráfico para resolver ecuaciones. Forme sus propios ejemplos para ilustrar las ventajas y desventajas de cada método.

### 76. Notación de ecuaciones en calculadoras graficadoras

Cuando ingresamos las siguientes ecuaciones en una calculadora, ¿lo que se ve en la pantalla cómo difiere de la forma usual de escribir las ecuaciones? (Verifique su manual del usuario si no está seguro.)

(a)  $y = |x|$

(b)  $y = \sqrt[5]{x}$

(c)  $y = \frac{x}{x - 1}$

(d)  $y = x^3 + \sqrt[3]{x + 2}$

77. **Ingrrese ecuaciones con cuidado** Un estudiante desea graficar

$$y = x^{1/3} \quad y \quad y = \frac{x}{x + 4}$$

en la misma pantalla, de modo que ingresa la siguiente información en su calculadora:

$$Y_1 = X^{1/3} \quad Y_2 = X/X+4$$

La calculadora graficadora dos rectas en lugar de las ecuaciones que el estudiante deseaba. ¿Qué estuvo mal?

## 1.10 RECTAS

Pendiente de una recta ► Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ► Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta ► Rectas verticales y horizontales ► Ecuación general de una recta ► Rectas paralelas y perpendiculares ► Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

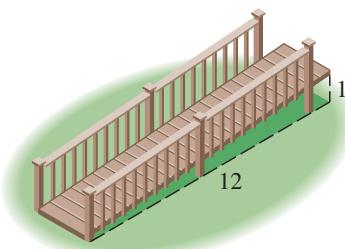
En esta sección encontramos ecuaciones para rectas que se encuentren en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté inclinada la recta, por lo que empezzamos por estudiar el concepto de pendiente.

### ▼ Pendiente de una recta

Primero necesitamos una forma de medir la “inclinación” de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos el *corrimiento* como la distancia que nos movemos a la derecha y la *elevación* como la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La *pendiente* de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$$

La Figura 1 muestra situaciones en las que la pendiente es importante. Los carpinteros usan el término *inclinación* para la pendiente de un techo o una escalera; el término *pendiente* se usa para la pendiente de una carretera.



Pendiente de una rampa

$$\text{Pendiente} = \frac{1}{12}$$



Inclinación de un techo

$$\text{Pendiente} = \frac{1}{3}$$



Pendiente de una carretera

$$\text{Pendiente} = \frac{8}{100}$$

FIGURA 1

Si una recta está en un plano de coordenadas, entonces el **corrimiento** es el cambio en la coordenada  $x$  y la **elevación** es el cambio correspondiente en la coordenada  $y$  entre cualesquier dos puntos sobre la recta (vea Figura 2). Esto nos da la siguiente definición de pendiente.

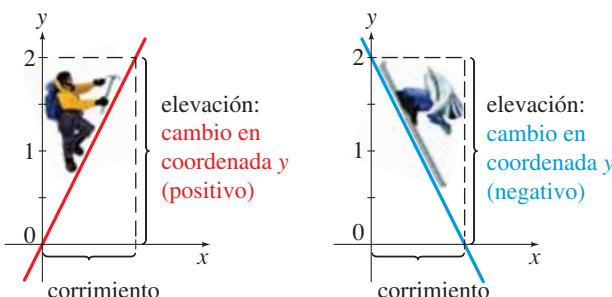


FIGURA 2

### PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente**  $m$  de una recta no vertical que pasa por los puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escogen sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

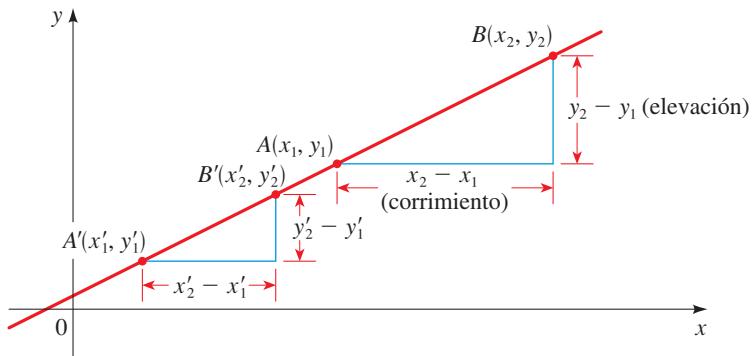


FIGURA 3

La Figura 4 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es muy grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

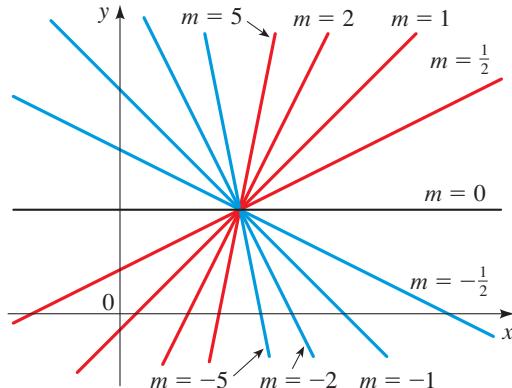


FIGURA 4 Rectas con varias pendientes

**EJEMPLO 1** | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $P(2, 1)$  y  $Q(8, 5)$ .

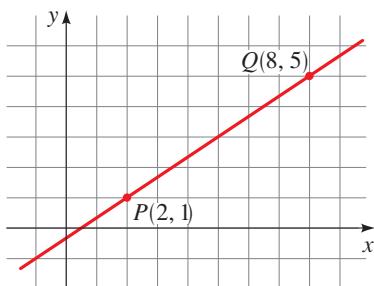


FIGURA 5

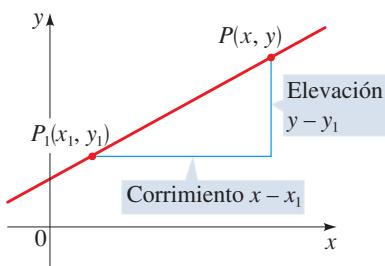


FIGURA 6

**SOLUCIÓN** Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

### ▼ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado  $P(x_1, y_1)$  y tiene pendiente  $m$ . Un punto  $P(x, y)$  con  $x \neq x_1$  está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por  $P_1$  y  $P$  es igual a  $m$  (vea Figura 6), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma  $y - y_1 = m(x - x_1)$ ; nótese que la ecuación también se satisface cuando  $x = x_1$  y  $y = y_1$ . Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

#### FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto  $(x_1, y_1)$  y tiene pendiente  $m$  es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

### EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

- (a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por  $(1, -3)$  con pendiente  $-\frac{1}{2}$ .

- (b) Trace la recta.

**SOLUCIÓN**

- (a) Usando la forma punto-pendiente con  $m = -\frac{1}{2}$ ,  $x_1 = 1$  y  $y_1 = -3$ , obtenemos la ecuación de la recta como

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{Pendiente } m = -\frac{1}{2}, \text{ punto } (1, -3)$$

$$2y + 6 = -x + 1 \quad \text{Multiplique por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \quad \text{Reacomode}$$

- (b) El hecho de que la pendiente es  $-\frac{1}{2}$  nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

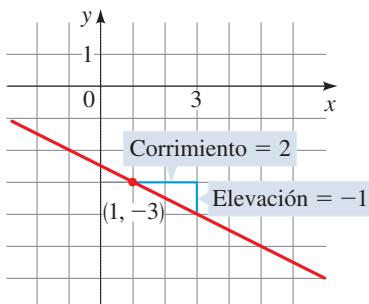


FIGURA 7

### EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(-1, 2)$  y  $(3, -4)$ .

**SOLUCIÓN** La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar *ya sea* el punto  $(-1, 2)$  o el punto  $(3, -4)$ , en la ecuación punto-pendiente. Terminaremos con la misma respuesta final.

Usando la forma punto-pendiente con  $x_1 = -1$  y  $y_1 = 2$ , obtenemos

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1) \quad \text{Pendiente } m = -\frac{3}{2}, \text{ punto } (-1, 2)$$

$$2y - 4 = -3x - 3 \quad \text{Multiplique por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad \text{Reacomode}$$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

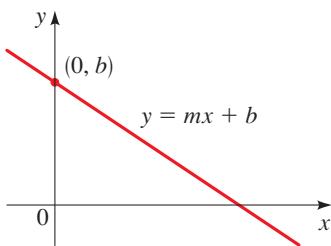


FIGURA 8

### ▼ Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente  $m$  y a  $b$  como punto de intersección con el eje  $y$  (vea Figura 8). Esto significa que la recta cruza el eje  $y$  en el punto  $(0, b)$ , de modo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con  $x = 0$  y  $y = 0$ , se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica a  $y = mx + b$ , que se denomina **forma pendiente-punto de intersección** de la ecuación de una recta.

#### FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente  $m$  y punto de intersección  $b$  en el eje  $y$  es

$$y = mx + b$$

### EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

- Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección  $y$  de  $-2$ .
- Encuentre la pendiente e intersección  $y$  de la recta  $3y - 2x = 1$ .

#### SOLUCIÓN

- Como  $m = 3$  y  $b = -2$ , de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

- Primero escribimos la ecuación en la forma  $y = mx + b$ :

Pendiente	Intersección en eje $y$
$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$	

$$\begin{aligned} 3y - 2x &= 1 \\ 3y &= 2x + 1 && \text{Sume } 2x \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} && \text{Divida entre 3} \end{aligned}$$

De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es  $m = \frac{2}{3}$  y la intersección en el eje  $y$  es  $b = \frac{1}{3}$ .

### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 25 Y 47

### ▼ Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es  $m = 0$ , de modo que su ecuación es  $y = b$ , donde  $b$  es el punto de intersección con el eje  $y$  (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como  $x = a$ , donde  $a$  es el punto de intersección con el eje  $x$ , porque la coordenada  $x$  de todo punto en la recta es  $a$ .

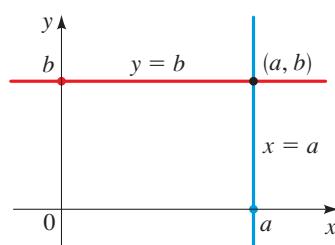


FIGURA 9

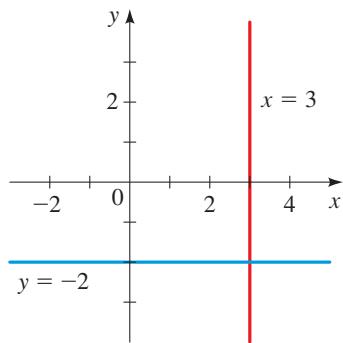


FIGURA 10

### RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por  $(a, b)$  es  $x = a$ .

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por  $(a, b)$  es  $y = b$ .

### EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales

- Una ecuación para la recta vertical que pasa por  $(3, 5)$  es  $x = 3$ .
- La gráfica de la ecuación  $x = 3$  es una recta vertical con intersección 3 en el eje  $x$ .
- Una ecuación para la recta horizontal que pasa por  $(8, -2)$  es  $y = -2$ .
- La gráfica de la ecuación  $y = -2$  es una recta horizontal con intersección  $-2$  en el eje  $y$ .

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 33

### ▼ Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes y  $A$  y  $B$  no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación  $y = mx + b$  o  $-mx + y - b = 0$ , que es una ecuación lineal con  $A = -m$ ,  $B = 1$  y  $C = -b$ .
- Una recta vertical tiene la ecuación  $x = a$  o  $x - a = 0$ , que es una ecuación lineal con  $A = 1$ ,  $B = 0$  y  $C = -a$ .

A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si  $B \neq 0$ , la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{Divida por } B$$

y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con  $m = -A/B$  y  $b = -C/B$ ).

- Si  $B = 0$ , la ecuación se convierte en

$$Ax + C = 0 \quad \text{Haga } B = 0$$

o  $x = -C/A$ , que representa una recta vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

### EQUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

**EJEMPLO 6** | Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación  $2x - 3y - 12 = 0$ .

**SOLUCIÓN 1** Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica, es suficiente hallar dos puntos cualesquiera en la recta. Los puntos de intersección son los más fáciles de hallar.

Punto de intersección con  $x$ : Sustituya  $y = 0$ , para obtener  $2x - 12 = 0$ , por lo que  $x = 6$

Punto de intersección con  $y$ : Sustituya  $x = 0$ , para obtener  $-3y - 12 = 0$ , por lo que  $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica de la Figura 11.

**SOLUCIÓN 2** Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección:

$$2x - 3y - 12 = 0$$

$$2x - 3y = 12 \quad \text{Sume } 12$$

$$-3y = -2x + 12 \quad \text{Reste } 2x$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4 \quad \text{Divida entre } -3$$

Esta ecuación está en la forma  $y = mx + b$ , por lo que la pendiente es  $m = \frac{2}{3}$  y la intersección y es  $b = -4$ . Para trazar la gráfica, localizamos el punto de intersección con el eje y y nos movemos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, como se muestra en la Figura 12.

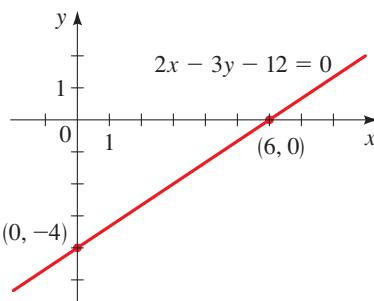


FIGURA 11

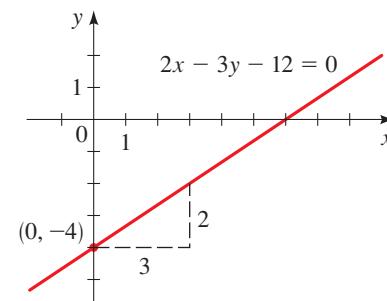


FIGURA 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

**▼ Rectas paralelas y perpendiculares**

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

**RECTAS PARALELAS**

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

**DEMOSTRACIÓN** Consideremos que las rectas  $l$  y  $l_1$  de la Figura 13 tienen pendientes  $m_1$  y  $m_2$ . Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

A la inversa, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos serán semejantes, por lo que  $\angle BAC = \angle EDF$  y las rectas son paralelas.

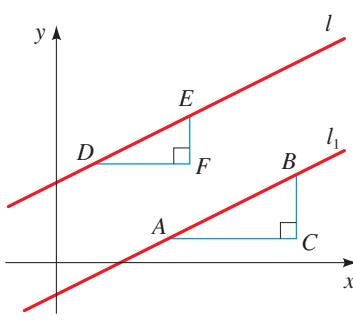


FIGURA 13

**EJEMPLO 7** | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(5, 2)$  que es paralela a la recta  $4x + 6y + 5 = 0$ .

**SOLUCIÓN** Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$4x + 6y + 5 = 0$$

$$6y = -4x - 5 \quad \text{Reste } 4x + 5$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} \quad \text{Divida entre 6}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente  $m = -\frac{2}{3}$ . Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente  $m = -\frac{2}{3}$ . De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5) \quad \text{Pendiente } m = -\frac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2)$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \quad \text{Multiplique por 3}$$

$$2x + 3y - 16 = 0 \quad \text{Reacomode}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es  $2x + 3y - 16 = 0$ .

**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31**

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como la de las rectas paralelas.

**RECTAS PERPENDICULARES**

Dos rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$  son perpendiculares si y sólo si  $m_1m_2 = -1$ , es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

**DEMOSTRACIÓN** En la Figura 14 mostramos dos rectas que se cruzan en el origen. (Si las rectas se cruzan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cruzan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales).

Si las rectas  $l_1$  y  $l_2$  tienen pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , entonces sus ecuaciones son  $y = m_1x$  y  $y = m_2x$ . Observe que  $A(1, m_1)$  está sobre  $l_1$  y  $B(1, m_2)$  está sobre  $l_2$ . Por el Teorema de Pitágoras y su inverso (vea página 219)  $OA \perp OB$  si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

Por la Fórmula de la Distancia, esto se convierte en

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

$$2 = -2m_1m_2$$

$$m_1m_2 = -1$$

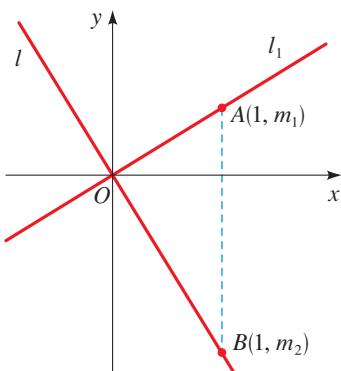


FIGURA 14

**EJEMPLO 8** | Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos  $P(3, 3)$ ,  $Q(8, 17)$  y  $R(11, 5)$  son los vértices de un triángulo rectángulo.

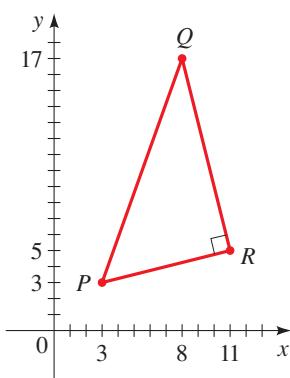


FIGURA 15

**SOLUCIÓN** Las pendientes de las rectas que contienen a  $PR$  y  $QR$  son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5 - 3}{11 - 3} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{5 - 17}{11 - 8} = -4$$

Como  $m_1 m_2 = -1$ , estas rectas son perpendiculares, de modo que  $PQR$  es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 57

**EJEMPLO 9** Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta  $4x + 6y + 5 = 0$  y pasa por el origen.

**SOLUCIÓN** En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta  $4x + 6y + 5 = 0$  es  $-\frac{2}{3}$ . Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir,  $\frac{3}{2}$ . Como la recta pedida pasa por  $(0, 0)$ , la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \quad \text{Pendiente } m = \frac{3}{2}, \text{ punto } (0, 0)$$

$$y = \frac{3}{2}x \quad \text{Simplifique}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

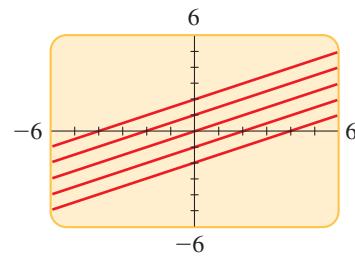
**EJEMPLO 10** | Graficar una familia de rectas

Use una calculadora graficadora para graficar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para  $b = -2, -1, 0, 1, 2$ . ¿Qué propiedad comparten las rectas?

**SOLUCIÓN** Las rectas están graficadas en la Figura 16 en el rectángulo de vista  $[-6, 6]$  por  $[-6, 6]$ . Las rectas tienen todas ellas la misma pendiente, por lo que son paralelas.

FIGURA 16  $y = 0.5x + b$ 

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 41

### ▼ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es  $-0.03$ .

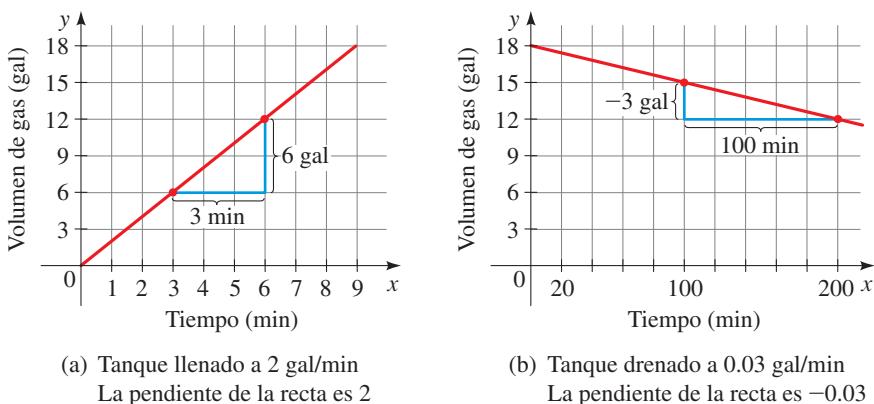


FIGURA 17

Los siguientes dos ejemplos dan otras situaciones en las que la pendiente de una recta es una rapidez de cambio.

### EJEMPLO 11 | Pendiente como rapidez de cambio

Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua  $w$  del estanque está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde  $t$  es el número de años desde que se construyó la presa y  $w$  se mide en pies.

- Trace la gráfica de esta ecuación.
- ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección  $w$  de esta gráfica?

### SOLUCIÓN

- Esta ecuación es lineal, por lo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, localizamos dos puntos que estén sobre la gráfica y trazamos una recta que pase por ellos.

Cuando  $t = 0$ , entonces  $w = 4.5(0) + 28 = 28$ , por lo que  $(0, 28)$  está sobre la recta.

Cuando  $t = 2$ , entonces  $w = 4.5(2) + 28 = 37$ , por lo que  $(2, 37)$  está sobre la recta.

La recta determinada por esos puntos se muestra en la figura 18.

- La pendiente es  $m = 4.5$ ; representa la rapidez de cambio del nivel de agua con respecto al tiempo. Esto significa que el nivel de agua *aumenta* 4.5 pies por año. El punto de intersección  $w$  es 28 y se presenta cuando  $t = 0$ , por lo que representa el nivel de agua cuando la presa se construyó.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69

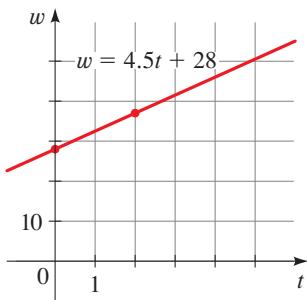


FIGURA 18

### EJEMPLO 12 | Relación lineal entre temperatura y elevación

- A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfriá. Si la temperatura al nivel del suelo es de  $20^\circ\text{C}$  y la temperatura a una altitud de 1 km es  $10^\circ\text{C}$ , exprese la temperatura  $T$  (en  $^\circ\text{C}$ ) en términos de la altitud  $h$  (en km). (Suponga que la relación entre  $T$  y  $H$  es lineal.)

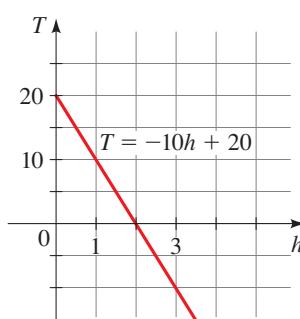


FIGURA 19

- (b) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?  
 (c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

### SOLUCIÓN

- (a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre  $T$  y  $h$ , la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde  $m$  y  $b$  son constantes. Cuando  $h = 0$ , nos dicen que  $T = 20$ , de modo que

$$20 = m(0) + b$$

$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando  $h = 1$ , tenemos  $T = 10$  y entonces

$$10 = m(1) + 20$$

$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

- (b) La gráfica está trazada en la Figura 19. La pendiente es  $m = -10^\circ\text{C}/\text{km}$ , y ésta representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la distancia arriba del suelo. En consecuencia, la temperatura *disminuye*  $10^\circ\text{C}$  por kilómetro de altitud.  
 (c) A una altitud de  $h = 2.5$  km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5^\circ\text{C}$$

### AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 73

## 1.10 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

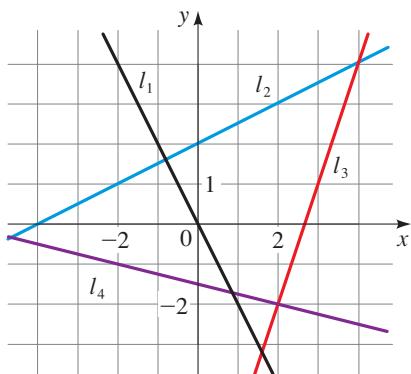
- Encontramos la “inclinación”, o pendiente, de una recta que pasa por dos puntos al dividir la diferencia en las coordenadas \_\_\_\_\_ de estos puntos entre la diferencia en las coordenadas \_\_\_\_\_. Entonces, la recta que pasa por los puntos  $(0, 1)$  y  $(2, 5)$  tiene pendiente \_\_\_\_\_.
- Una recta tiene la ecuación  $y = 3x + 2$ .
  - Esta recta tiene pendiente \_\_\_\_\_.
  - Cualquier recta paralela a esta recta tiene pendiente \_\_\_\_\_.
  - Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente \_\_\_\_\_.
- La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto  $(1, 2)$  es \_\_\_\_\_.

- La pendiente de una recta horizontal es \_\_\_\_\_. La ecuación de la recta horizontal que pasa por  $(2, 3)$  es \_\_\_\_\_.
- La pendiente de una recta vertical es \_\_\_\_\_. La ecuación de la recta vertical que pasa por  $(2, 3)$  es \_\_\_\_\_.

### HABILIDADES

- 5-12 ■ Encuentre la pendiente de la recta que pasa por  $P$  y  $Q$ .
- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 5. $P(0, 0)$ , $Q(4, 2)$    | 6. $P(0, 0)$ , $Q(2, -6)$   |
| 7. $P(2, 2)$ , $Q(-10, 0)$  | 8. $P(1, 2)$ , $Q(3, 3)$    |
| 9. $P(2, 4)$ , $Q(4, 3)$    | 10. $P(2, -5)$ , $Q(-4, 3)$ |
| 11. $P(1, -3)$ , $Q(-1, 6)$ | 12. $P(-1, -4)$ , $Q(6, 0)$ |

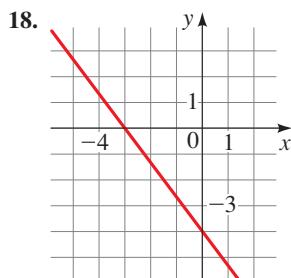
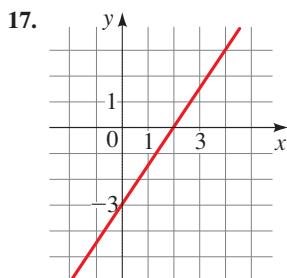
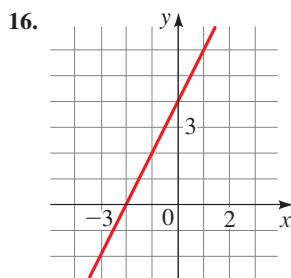
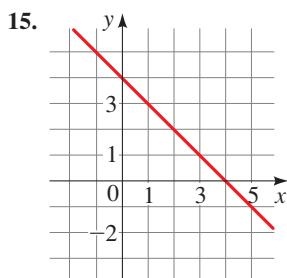
13. Encuentre las pendientes de las rectas  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$  en la figura siguiente.



14. (a) Trace rectas que pasen por  $(0, 0)$  con pendientes  $1, 0, \frac{1}{2}, 2$  y  $-1$ .

- (b) Trace rectas que pasen por  $(0, 0)$  con pendientes  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$  y  $3$ .

- 15-18 ■ Encuentre la ecuación para la recta cuya gráfica está trazada.



- 19-38 ■ Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

19. Pasa por  $(2, 3)$ , pendiente 5

20. Pasa por  $(-2, 4)$ , pendiente  $-1$

21. Pasa por  $(1, 7)$ , pendiente  $\frac{2}{3}$

22. Pasa por  $(-3, -5)$ , pendiente  $-\frac{7}{2}$

23. Pasa por  $(2, 1)$  y  $(1, 6)$

24. Pasa por  $(-1, -2)$  y  $(4, 3)$

25. Pendiente 3; intersección en  $y$  es  $-2$

26. Pendiente  $\frac{2}{5}$ ; intersección en  $y$  es 4

27. Intersección en  $x$  es 1; intersección en  $y$  es  $-3$

28. Intersección en  $x$  es  $-8$ ; intersección en  $y$  es 6

29. Pasa por  $(4, 5)$ ; paralela al eje  $x$

30. Pasa por  $(4, 5)$ ; paralela al eje  $y$

31. Pasa por  $(1, -6)$ ; paralela a la recta  $x + 2y = 6$

32. Intersección en  $y$  es 6; paralela a la recta  $2x + 3y + 4 = 0$

33. Pasa por  $(-1, 2)$ ; paralela a la recta  $x = 5$

34. Pasa por  $(2, 6)$ ; perpendicular a la recta  $y = 1$

35. Pasa por  $(-1, -2)$ ; perpendicular a la recta  $2x + 5y + 8 = 0$

36. Pasa por  $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$ ; perpendicular a la recta  $4x - 8y = 1$

37. Pasa por  $(1, 7)$ ; paralela a la recta que pasa por  $(2, 5)$  y  $(-2, 1)$

38. Pasa por  $(-2, -11)$ ; perpendicular a la recta que pasa por  $(1, 1)$  y  $(5, -1)$

39. (a) Trace la recta con pendiente  $\frac{3}{2}$  que pasa por el punto  $(-2, 1)$

- (b) Encuentre la ecuación para esta recta.

40. (a) Trace la recta con pendiente  $-2$  que pasa por el punto  $(4, -1)$

- (b) Encuentre la ecuación para esta recta.

- 41-44 ■ Use calculadora graficadora para graficar la familia de rectas dada en el mismo rectángulo de vista. ¿Qué tienen en común las rectas?

41.  $y = -2x + b$  para  $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

42.  $y = mx - 3$  para  $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

43.  $y = m(x - 3)$  para  $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

44.  $y = 2 + m(x + 3)$  para  $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm$

- 45-56 ■ Encuentre la pendiente y el punto de intersección  $y$  de la recta y trace su gráfica.

45.  $x + y = 3$

46.  $3x - 2y = 12$

47.  $x + 3y = 0$

48.  $2x - 5y = 0$

49.  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

50.  $-3x - 5y + 30 = 0$

51.  $y = 4$

52.  $x = -5$

53.  $3x - 4y = 12$

54.  $4y + 8 = 0$

55.  $3x + 4y - 1 = 0$

56.  $4x + 5y = 10$

57. Use pendientes para demostrar que  $A(1, 1)$ ,  $B(7, 4)$ ,  $C(5, 10)$  y  $D(-1, 7)$  son vértices de un paralelogramo.

58. Use pendientes para demostrar que  $A(-3, -1)$ ,  $B(3, 3)$  y  $C(-9, 8)$  son vértices de un triángulo rectángulo.

59. Use pendientes para demostrar que  $A(1, 1)$ ,  $B(11, 3)$ ,  $C(10, 8)$  y  $D(0, 6)$  son vértices de un rectángulo.

60. Use pendientes para determinar si los puntos dados son colineales (están sobre una recta).

- (a)  $(1, 1), (3, 9), (6, 21)$

- (b)  $(-1, 3), (1, 7), (4, 15)$

61. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos  $A(1, 4)$  y  $B(7, -2)$

62. Encuentre el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

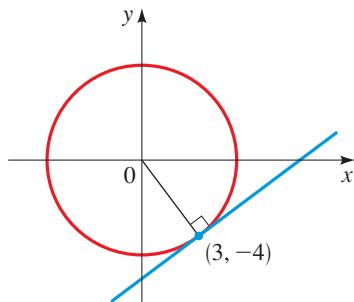
$$2y + 3x - 6 = 0$$

63. (a) Demuestre que si los puntos de intersección  $x$  y  $y$  de una recta son números diferentes de cero  $a$  y  $b$ , entonces la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

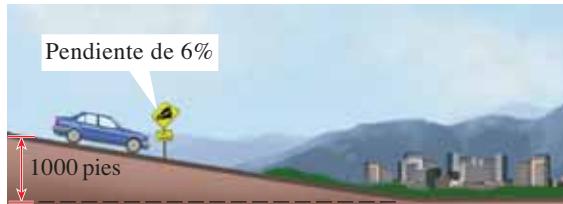
Ésta se llama **forma dos puntos de intersección** de la ecuación de una recta.

- (b) Use la parte (a) para hallar la ecuación de la recta cuyo punto de intersección  $x$  es 6 y cuyo punto de intersección  $y$  es  $-8$ .
64. (a) Encuentre la ecuación para la recta tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$  en el punto  $(3, -4)$ . (Vea la figura.)
- (b) ¿En qué otro punto sobre la circunferencia es que una recta tangente será paralela a la recta tangente de la parte (a)?



## APLICACIONES

65. **Pendiente de una carretera** Al poniente de Albuquerque, Nuevo México, la Ruta 40 que se dirige al oriente es recta y con un agudo descenso hacia la ciudad. La carretera tiene una pendiente del 6%, lo cual significa que su pendiente es  $-\frac{6}{100}$ . Manejando en esta carretera, observa por señales de elevación que usted ha descendido una distancia de 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en su distancia horizontal?



66. **Calentamiento global** Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde  $T$  es la temperatura en  $^{\circ}\text{C}$  y  $t$  es años desde 1950.

- (a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección  $T$ ?  
 (b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

67. **Dosis de medicamentos** Si la dosis recomendada a un adulto para un medicamento es  $D$  (en mg), entonces, para determinar la dosis apropiada  $c$  para un niño de edad  $a$ , los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

- (a) Encuentre la pendiente. ¿Qué representa ésta?  
 (b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

68. **Mercado de segunda mano** La gerente de un mercado de segunda mano en fin de semana sabe, por experiencia del pasado, que si ella cobra  $x$  dólares por la renta de espacio en el mercado de segunda mano, entonces el número  $y$  de espacios que ella renta está dado por la ecuación  $y = 200 - 4x$ .

- (a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el cargo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas ambas.)  
 (b) ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección y el punto de intersección  $x$  de la gráfica?

69. **Costo de producción** Un pequeño fabricante de enseres electrodomésticos encuentra que si produce  $x$  hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

(donde  $y$  se mide en dólares).

- (a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.  
 (b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección  $y$  de la gráfica?

70. **Escalas de temperatura** La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit ( $F$ ) y Celsius ( $C$ ) está dada por la ecuación  $F = \frac{9}{5}C + 32$ .

- (a) Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.  
 (b) Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [Sugerencia: Suponga que  $a$  es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga  $F = a$  y  $C = a$  y a continuación despeje  $a$ .]

$C$	$F$
$-30^{\circ}$	
$-20^{\circ}$	
$-10^{\circ}$	
$0^{\circ}$	
	$50^{\circ}$
	$68^{\circ}$
	$86^{\circ}$

71. **Grillos y temperatura** Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a  $70^{\circ}\text{F}$  y 168 chirridos por minuto a  $80^{\circ}\text{F}$ .

- (a) Encuentre la ecuación lineal que relacione la temperatura  $t$  y el número de chirridos por minuto  $n$ .  
 (b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

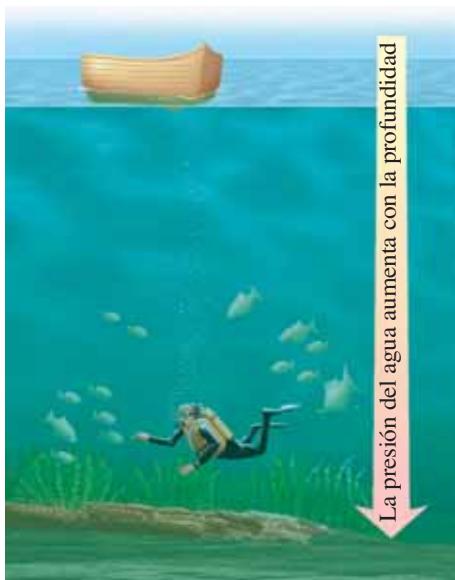
72. **Depreciación** Un pequeño negocio compra una computadora en \$4000. Después de 4 años el valor de la computadora se espera que sea de \$200. Para fines de contabilidad, el negocio usa *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo determinado.

Esto significa que si  $V$  es el valor de la computadora en el tiempo  $t$ , entonces se usa una ecuación lineal para relacionar  $V$  y  $t$ .

- Encuentre una ecuación lineal que relacione  $V$  y  $t$ .
- Trace una gráfica de esta ecuación lineal.
- ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección  $V$  de la gráfica?
- Encuentre el valor depreciado de la computadora 3 años a partir de la fecha de compra.

- 73. Presión y profundidad** En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre el agua, 15 lb/pulg.<sup>2</sup>. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg.<sup>2</sup> por cada 10 pies de descenso.

- Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano.
- Trace una gráfica de esta ecuación lineal.
- ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?
- ¿A qué profundidad es de 100 lb/pulg.<sup>2</sup> la presión?



- 74. Distancia, rapidez y tiempo** Jason y Debbie salen de Detroit a las 2:00 p.m. y manejan a una rapidez constante, via-

jando hacia al poniente en la carretera I-90. Pasan Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 p.m.

- Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
- Trace la gráfica de la ecuación de la parte (a).
- ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

- 75. Costo de conducir un auto** El costo mensual de conducir un auto depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo su costo de conducción fue de \$380 por 480 millas y, en junio, su costo fue de \$460 por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual  $C$  de conducir un auto y la distancia recorrida  $d$ .

- Encuentre una ecuación lineal que relacione  $C$  y  $d$ .
- Use la parte (a) para predecir el costo de conducir 1500 millas por mes.
- Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?
- ¿Qué representa el punto de intersección y de la gráfica?
- ¿Por qué una relación lineal es un modelo apropiado para esta situación?

- 76. Costo de manufactura** El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta \$2200 manufacturar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un día.

- Suponiendo que la relación entre el costo y el número de sillas producidas sea lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. A continuación, grafique la ecuación.
- ¿Cuál es la pendiente de la recta de la parte (a), y qué representa?
- ¿Cuál es el punto de intersección y de esta recta, y qué representa?

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 77. ¿Qué significa la pendiente?** Suponga que la gráfica de la temperatura exterior en cierto tiempo es una recta. ¿Cómo está cambiando el clima si la pendiente de la recta es positiva? ¿Si es negativa? ¿Y si es cero?

- 78. Puntos colineales** Suponga que nos dan las coordenadas de tres puntos en el plano y se desea ver si están en la misma recta. ¿Cómo se puede hacer esto usando pendientes? ¿Usando la Fórmula de la Distancia? ¿Puede usted considerar otro método?

## 1.11 MODELOS CON EL USO DE VARIACIONES

| Variación directa ► Variación inversa ► Variación conjunta

Cuando los científicos hablan de un modelo matemático para un fenómeno real, con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir la forma en que la población de una especie animal varía con el tiempo, o el modo en que la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En esta sección estudiamos una clase de modelado llamado *variación*.

## Variación directa

Dos tipos de modelos matemáticos se presentan con tanta frecuencia que se les dan nombres especiales. El primero de ellos se llama *variación directa* y ocurre cuando una cantidad es un múltiplo constante de la otra, de modo que usamos una ecuación de la forma  $y = kx$  para modelar esta dependencia.

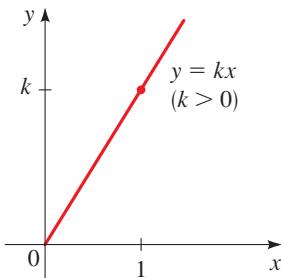


FIGURA 1

### VARIACIÓN DIRECTA

Si las cantidades  $x$  y  $y$  están relacionadas por una ecuación

$$y = kx$$

para alguna constante  $k \neq 0$ , decimos que  $y$  **varía directamente con  $x$** , o que  $y$  es **directamente proporcional a  $x$** , o simplemente  $y$  es proporcional a  $x$ . La constante  $k$  se denomina **constante de proporcionalidad**.



Recuerde que la gráfica de una ecuación de la forma  $y = mx + b$  es una recta con pendiente  $m$  y punto de intersección  $b$  en el eje  $y$ . Entonces, la gráfica de una ecuación  $y = kx$  que describe variación directa es una recta con pendiente  $k$  y punto de intersección 0 en el eje  $y$  (vea Figura 1).

### EJEMPLO 1 | Variación directa

Durante una tormenta se ve el rayo antes de escuchar el trueno porque la luz viaja mucho más rápido que el sonido. La distancia entre una persona y la tormenta varía directamente con el tiempo entre el relámpago y el trueno.

- Suponga que el trueno de una tormenta que está a 5400 pies de distancia tarda 5 s en llegar a usted. Determine la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación para la variación.
- Trace la gráfica de esta ecuación. ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?
- Si el tiempo entre el relámpago y el trueno es ahora de 8 s, ¿a qué distancia está la tormenta?

### SOLUCIÓN

- Sea  $d$  la distancia entre usted y la tormenta y sea  $t$  el tiempo. Nos indican que  $d$  varía directamente con  $t$ , por lo que

$$d = kt$$

donde  $k$  es una constante. Para hallar  $k$ , usamos el hecho de que  $t = 5$  cuando  $d = 5400$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$5400 = k(5) \quad \text{Sustituya}$$

$$k = \frac{5400}{5} = 1080 \quad \text{Despeje } k$$

Sustituyendo este valor de  $k$  de la ecuación por  $d$ , obtenemos

$$d = 1080t$$

porque la ecuación por  $d$  es una función de  $t$ .

- La gráfica de la ecuación  $d = 1080t$  es una recta que pasa por el origen con pendiente 1080 y se muestra en la Figura 2. La constante  $k = 1080$  es la rapidez aproximada del sonido (en pies/s).
- Cuando  $t = 8$ , tenemos

$$d = 1080 \cdot 8 = 8640$$

Por lo tanto, la tormenta está a 8640 pies  $\approx 1.6$  millas de distancia.

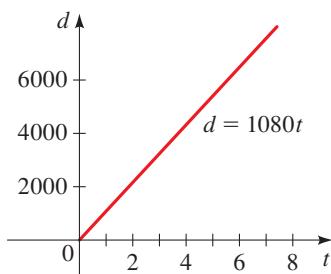


FIGURA 2

## ▼ Variación inversa

Otra ecuación que se usa con frecuencia en modelado matemático es  $y = k/x$ , donde  $k$  es una constante.

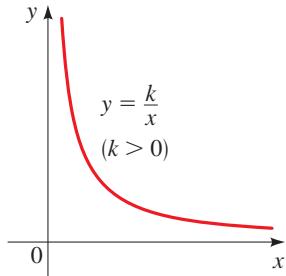


FIGURA 3 Variación inversa

### VARIACIÓN INVERSA

Si las cantidades  $x$  y  $y$  están relacionadas por la ecuación

$$y = \frac{k}{x}$$

para alguna constante  $k \neq 0$  decimos que  $y$  es **inversamente proporcional a  $x$**  o que  $y$  **varía inversamente con  $x$** . La constante  $k$  se denomina **constante de proporcionalidad**.

La gráfica de  $y = k/x$  para  $x > 0$  se muestra en la Figura 3 para el caso  $k > 0$ . Da una imagen de lo que ocurre cuando  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ .

### EJEMPLO 2 | Variación inversa

La Ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.

- Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa  $0.106 \text{ m}^3$  a  $25^\circ\text{C}$  es  $50 \text{ kPa}$ . Encuentre la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación que expresa la proporcionalidad inversa.
- Si la muestra se expande a un volumen de  $0.3 \text{ m}^3$ , encuentre la nueva presión.

### SOLUCIÓN

- Sea  $P$  la presión de la muestra de gas y sea  $V$  su volumen. Entonces, por la definición de proporcionalidad inversa, tenemos

$$P = \frac{k}{V}$$

donde  $k$  es una constante. Para hallar  $k$ , usamos el hecho de que  $P = 50$  cuando  $V = 0.106$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$50 = \frac{k}{0.106} \quad \text{Sustituya}$$

$$k = (50)(0.106) = 5.3 \quad \text{Despeje } k$$

Poniendo este valor de  $k$  en la ecuación por  $P$ , tenemos

$$P = \frac{5.3}{V}$$

- Cuando  $V = 0.3$ , tenemos

$$P = \frac{5.3}{0.3} \approx 17.7$$

Entonces la nueva presión es aproximadamente  $17.7 \text{ kPa}$ .

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 19 Y 35**

## ▼ Variación conjunta

Una cantidad física depende con frecuencia de más de una cantidad. Si una cantidad es proporcional a dos o más cantidades diferentes, a dicha relación se le denomina *variación conjunta*.

**VARIACIÓN CONJUNTA**

Si las cantidades  $x$ ,  $y$  y  $z$  están relacionadas por la ecuación

$$z = kxy$$

donde  $k$  es una constante diferente de cero, decimos que  $z$  **varía conjuntamente con  $x$  y  $y$  o  $z$  es conjuntamente proporcional a  $x$  y  $y$** .

En ciencias, las relaciones entre tres o más variables son comunes, y es posible cualquier combinación de los tipos diferentes de proporcionalidad que hemos estudiado. Por ejemplo, si

$$z = k \frac{x}{y}$$

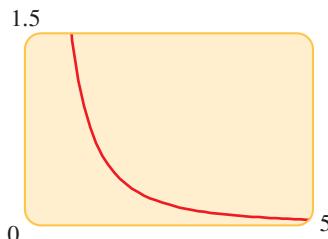
Decimos que  $z$  **es proporcional a  $x$  e inversamente proporcional a  $y$** .

**EJEMPLO 3 | Ley de Newton de la Gravitación**

La Ley de Newton de la Gravitación dice que dos cuerpos con masas  $m_1$  y  $m_2$  se atraen entre sí, con una fuerza  $F$  que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$  entre los cuerpos. Exprese la Ley de Newton de la Gravitación como ecuación.

**SOLUCIÓN** Usando las definiciones de variación conjunta e inversa y la tradicional notación  $G$  para la constante de proporcionalidad gravitacional, tenemos

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 21 Y 41**

**FIGURA 4** Gráfica de  $F = \frac{1}{r^2}$

Si  $m_1$  y  $m_2$  son masas fijas, entonces la fuerza gravitacional entre ellas es  $F = C/r^2$  (donde  $C = Gm_1m_2$  es una constante). La Figura 4 muestra la gráfica de esta ecuación para  $r > 0$  con  $C = 1$ . Observe cómo decrece la atracción gravitacional con una distancia creciente.

**1.11 EJERCICIOS****CONCEPTOS**

- Si las cantidades  $x$  y  $y$  están relacionadas por la ecuación  $y = 3x$ , entonces decimos que  $y$  es \_\_\_\_\_ a  $x$  y la constante de \_\_\_\_\_ es 3.
- Si las cantidades  $x$  y  $y$  están relacionadas por la ecuación  $y = \frac{3}{x}$ , entonces decimos que  $y$  es \_\_\_\_\_ a  $x$  y la constante de \_\_\_\_\_ es 3.
- Si las cantidades  $x$ ,  $y$  y  $z$  están relacionadas por la ecuación  $z = 3\frac{x}{y}$ , entonces decimos que  $z$  es \_\_\_\_\_ a  $x$  e \_\_\_\_\_ a  $y$ .

- Si  $z$  es conjuntamente proporcional a  $x$  y a  $y$  y si  $z$  es 10 cuando  $x$  es 4 y  $y$  es 5, entonces  $x$ ,  $y$  y  $z$  están relacionadas por la ecuación  $z = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**HABILIDADES**

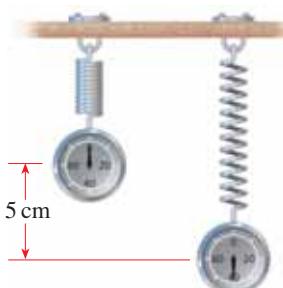
- 5-16** ■ Escriba una ecuación que exprese el enunciado.

- $T$  varía directamente con  $x$ .
- $P$  es directamente proporcional a  $w$ .
- $v$  es inversamente proporcional a  $z$ .
- $w$  es conjuntamente proporcional a  $m$  y  $n$ .
- $y$  es proporcional a  $s$  e inversamente proporcional a  $t$ .

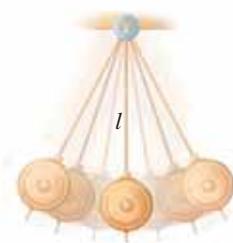
10.  $P$  varía inversamente con  $T$ .
  11.  $z$  es proporcional a la raíz cuadrada de  $y$ .
  12.  $A$  es proporcional al cuadrado de  $t$  e inversamente proporcional al cubo de  $x$ .
  13.  $V$  es conjuntamente proporcional a  $l$ ,  $w$  y  $h$ .
  14.  $S$  es conjuntamente proporcional a los cuadrados de  $r$  y  $\theta$ .
  15.  $R$  es proporcional a  $i$  e inversamente proporcional a  $P$  y  $t$ .
  16.  $A$  es conjuntamente proporcional a las raíces cuadradas de  $x$  y  $y$ .
- 17-28** ■ Exprese el enunciado como una ecuación. Use la información dada para hallar la constante de proporcionalidad.
17.  $y$  es directamente proporcional a  $x$ . Si  $x = 6$ , entonces  $y = 42$ .
  18.  $z$  varía inversamente con  $t$ . Si  $t = 3$ , entonces  $z = 5$ .
  19.  $R$  es inversamente proporcional a  $s$ . Si  $s = 4$ , entonces  $R = 3$ .
  20.  $P$  es directamente proporcional a  $T$ . Si  $T = 300$ , entonces  $P = 20$ .
  21.  $M$  varía directamente con  $x$  e inversamente con  $y$ . Si  $x = 2$  y  $y = 6$ , entonces  $M = 5$ .
  22.  $S$  varía conjuntamente con  $p$  y  $q$ . Si  $p = 4$  y  $q = 5$ , entonces  $S = 180$ .
  23.  $W$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $r$ . Si  $r = 6$ , entonces  $W = 10$ .
  24.  $t$  es conjuntamente proporcional a  $x$  y  $y$ , e inversamente proporcional a  $t$ . Si  $x = 2$ ,  $y = 3$  y  $r = 12$ , entonces  $t = 25$ .
  25.  $C$  es conjuntamente proporcional a  $l$ ,  $w$  y  $h$ . Si  $l = w = h = 2$ , entonces  $C = 128$ .
  26.  $H$  es conjuntamente proporcional a los cuadrados de  $l$  y  $w$ . Si  $l = 2$  y  $w = \frac{1}{3}$ , entonces  $H = 36$ .
  27.  $s$  es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de  $t$ . Si  $s = 100$ , entonces  $t = 25$ .
  28.  $M$  es conjuntamente proporcional a  $a$ ,  $b$  y  $c$  e inversamente proporcional a  $d$ . Si  $a$  y  $d$  tienen el mismo valor y si  $b$  y  $c$  son ambas 2, entonces  $M = 128$ .

## APLICACIONES

- 29. Ley de Hooke** La Ley de Hooke dice que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado  $x$  unidades más que su longitud natural es directamente proporcional a  $x$ . Aquí la constante de proporcionalidad se denomina **constante de resorte**.
- (a) Escriba la Ley de Hooke como una ecuación.
  - (b) Si un resorte tiene una longitud natural de 10 cm y se requiere una fuerza de 40 N para mantener estirado el resorte a una longitud de 15 cm, encuentre la constante de resorte.
  - (c) ¿Qué fuerza es necesaria para mantener estirado el resorte a una longitud de 14 cm?



- 30. Ley del Péndulo** El período de un péndulo (tiempo transcurrido durante una oscilación completa del péndulo) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del péndulo.
- (a) Exprese esta relación escribiendo una ecuación.
  - (b) Para duplicar el período, ¿cómo tendríamos que cambiar la longitud  $l$ ?



- 31. Costos de impresión** El costo  $C$  de imprimir una revista es conjuntamente proporcional al número de páginas  $p$  de la revista y el número  $m$  de revistas impresas.
- (a) Escriba una ecuación que exprese esta variación conjunta.
  - (b) Encuentre la constante de proporcionalidad si el costo de impresión es \$60,000 para 4000 ejemplares de una revista de 120 páginas.
  - (c) ¿Cuál sería el costo de impresión de 5000 ejemplares de una revista de 92 páginas?
- 32. Ley de Boyle** La presión  $P$  de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura  $T$  e inversamente proporcional al volumen  $V$ .
- (a) Escriba una ecuación que exprese la variación.
  - (b) Encuentre la constante de proporcionalidad si 100 L de gas ejercen una presión de 33.2 kPa a una temperatura de 400 K (temperatura absoluta medida en la escala Kelvin).
  - (c) Si la temperatura se aumenta a 500 K y el volumen se disminuye a 80 L, ¿cuál es la presión del gas?
- 33. Potencia de un molino de viento** La potencia  $P$  que se puede obtener de un molino de viento es directamente proporcional con el cubo de la velocidad del viento  $s$ .
- (a) Escriba una ecuación que exprese la variación.
  - (b) Encuentre la constante de proporcionalidad para un molino de viento que produce 96 watts de potencia cuando el viento está soplando a 10 mi/h.
  - (c) ¿Cuánta potencia producirá el molino de viento si la velocidad del viento aumenta a 30 mi/h?
- 34. Potencia necesaria para impulsar un bote** La potencia  $P$  (medida en caballos de fuerza, hp) necesaria para impulsar un bote es directamente proporcional al cubo de la velocidad  $s$ . Es necesario un motor de 80 hp para impulsar cierto bote a 10 nudos. Encuentre la potencia necesaria para mover el bote a 15 nudos.



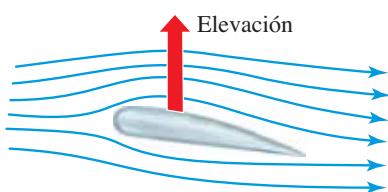
- 35. Intensidad del sonido** La intensidad  $L$  de un sonido (medida en decibeles, dB) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $d$  desde la fuente del sonido. Una persona que se encuentre a 10 pies de una podadora de césped capta un nivel de sonido de 70 dB. ¿Cuál es la intensidad del sonido de la podadora cuando la persona esté a 100 pies de distancia?

- 36. Distancia de parada** La distancia de frenado  $D$  de un auto después de haberse aplicado los frenos varía directamente con el cuadrado de su velocidad  $s$ . Cierta auto que corre a 50 mi/h puede detenerse en 240 pies. ¿Cuál es la velocidad máxima a la que puede correr si necesita detenerse en 160 pies?

- 37. Un chorro de agua** La potencia  $P$  de un chorro de agua es conjuntamente proporcional al área de sección transversal  $A$  del chorro y el cubo de la velocidad  $v$ . Si  $v$  se duplica y el área de sección transversal se reduce a la mitad, ¿en qué factor aumenta la potencia?



- 38. Fuerza ascensional aerodinámica** La fuerza ascensional  $L$  del ala de un avión en el despegue varía conjuntamente con el cuadrado de la velocidad  $s$  del avión y el área  $A$  de sus alas. Un avión con un área de alas de 500 pies<sup>2</sup> que corre a 50 mi/h experimenta una fuerza ascensional de 1700 lb. ¿Cuánta fuerza ascensional experimentará un avión con área de alas de 600 pies<sup>2</sup> que corre a 40 mi/h?



- 39. Fuerza de resistencia al avance de un bote** La fuerza  $F$  de resistencia al avance en un bote es conjuntamente proporcional al área  $A$  de superficie húmeda en el casco y el cuadrado de la velocidad  $s$  del bote. Un bote experimenta una fuerza de resistencia al avance de 220 lb cuando navega a 5 mi/h con un área de superficie húmeda de 40 pies<sup>2</sup>. ¿Con qué rapidez debe estar navegando un bote si tiene 28 pies<sup>2</sup> de área de superficie húmeda y está experimentando una fuerza de resistencia al avance de 175 lb?

- 40. Patinar en una curva** Un auto se desplaza en una curva que forma un arco circular. La fuerza  $F$  necesaria para evitar que el auto patine es conjuntamente proporcional al peso  $w$  del auto y el cuadrado de la velocidad  $s$ , y es inversamente proporcional al radio  $r$  de la curva.

- (a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.

- (b) Un auto que pesa 1600 lb se desplaza en una curva a 60 mi/h. El siguiente auto en transitar por esta curva pesa 2500 lb y requiere la misma fuerza que el primer auto para evitar que patine. ¿Cuál es la velocidad a la que circula?



- 41. Resistencia eléctrica** La resistencia  $R$  de un alambre varía directamente con su longitud  $L$  e inversamente con el cuadrado de su diámetro  $d$ .

- (a) Escriba una ecuación que exprese esta variación conjunta.  
 (b) Encuentre la constante de proporcionalidad si un alambre de 1.2 m de largo y 0.005 m de diámetro tiene una resistencia de 140 ohms.  
 (c) Encuentre la resistencia de un alambre hecho del mismo material que mide 3 m de largo y tiene un diámetro de 0.008 m.

- 42. Tercera Ley de Kepler** La Tercera Ley de Kepler de movimiento planetario dice que el cuadrado del período  $T$  de un planeta (el tiempo que tarda en hacer una revolución completa alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de su promedio de distancia  $d$  desde el Sol.

- (a) Exprese la Tercera Ley de Kepler como ecuación.  
 (b) Encuentre la constante de proporcionalidad usando el hecho que, para nuestro planeta, el período es alrededor de 365 días y la distancia promedio es de unos 93 millones de millas.  
 (c) El planeta Neptuno está a unos  $2.79 \times 10^9$  millas del Sol. Encuentre el período de Neptuno.

- 43. Energía de radiación** El total de energía de radiación  $E$  emitida por una superficie calentada, por unidad de área, varía con la cuarta potencia de su temperatura absoluta  $T$ . La temperatura es 6000 K en la superficie del Sol y 300 K en la superficie de la Tierra.

- (a) ¿Cuántas veces más energía de radiación por unidad de área es producida por el Sol que por la Tierra?  
 (b) El radio de la Tierra es de 3960 millas y el radio del Sol es de 435,000 millas. ¿Cuántas veces más de radiación total emite el Sol que la Tierra?

- 44. Valor de un lote** El valor de un lote para construcción en la isla de Galiano es conjuntamente proporcional a su área y a la cantidad de agua producida por un pozo que está en la propiedad. Un lote de 200 pies por 300 pies tiene un pozo que produce 10 galones de agua por minuto, y está valuado en 48,000 dólares. ¿Cuál es el valor de un lote de 400 pies por 400 pies si el pozo del lote produce 4 galones de agua por minuto?

- 45. Producción de coles** En una corta temporada de producción del territorio ártico canadiense de Nunavut, algunos jardineros encuentran posible producir coles gigantes en el sol de medianoche. Suponga que el tamaño final de una col es pro-

porcional a la cantidad de nutriente que recibe e inversamente proporcional al número de otras coles que la rodean. Una col que recibe 20 onzas de nutrientes y tenía otras 12 coles a su alrededor creció a un peso de 30 libras. ¿De qué tamaño crecería si recibe 10 onzas de nutrientes y tiene sólo 5 coles “vecinas”?

- 46. Calor de una fogata** El calor que percibe un excursionista por una fogata es proporcional a la cantidad de madera en la fogata e inversamente proporcional al cubo de su distancia desde la misma. Si el excursionista está a 20 pies de la fogata y alguien duplica la cantidad de madera que está ardiendo, ¿a qué distancia de la fogata tendría que estar para captar el mismo calor que antes?



## CAPÍTULO 1 | REPASO

### ■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

- Defina verbalmente cada término. (Compruebe consultando la definición del texto.)
  - Un número entero
  - Un número racional
  - Un número irracional
  - Un número real
- Exprese cada una de estas propiedades de números reales.
  - Propiedad Comutativa
  - Propiedad Asociativa
  - Propiedad Distributiva
- ¿Qué es un intervalo abierto? ¿Qué es un intervalo cerrado? ¿Qué notación se usa para estos intervalos?
- ¿Cuál es el valor absoluto de un número?
- (a) En la expresión  $a^x$ , ¿cuál es la base y cuál es el exponente?  
 (b) ¿Qué significa  $a^x$  si  $x = n$ , un entero positivo?  
 (c) ¿Qué pasa si  $x = 0$ ?  
 (d) ¿Qué pasa si  $x$  es un entero negativo:  $x = -n$ , donde  $n$  es un entero positivo?  
 (e) ¿Qué pasa si  $s = m/n$ , un número racional?  
 (f) Exprese las Leyes de Exponentes.
- (a) ¿Qué significa  $\sqrt[n]{a} = b$ ?  
 (b) ¿Por qué es  $\sqrt[n]{a^2} = |a|$ ?  
 (c) ¿Cuántas raíces  $n$  reales tiene un número positivo real si  $n$  es impar? ¿Y si es par?
- Explique cómo funciona el procedimiento de racionalizar el denominador.
- Exprese las Fórmulas de Productos Notables para  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $(a + b)^3$  y  $(a - b)^3$ .
- Exprese cada una de las Fórmulas de Factorización Notable.
  - Diferencia de cuadrados
  - Diferencia de cubos
  - Suma de cubos
- ¿Qué es la solución de una ecuación?
- ¿Cómo se resuelve una ecuación que contenga radicales? ¿Por qué es importante comprobar las respuestas al resolver ecuaciones de este tipo?
- ¿Cómo se resuelve una ecuación
  - algebraicamente?
  - gráficamente?
- Escriba la forma general de cada tipo de ecuación.
  - Una ecuación lineal
  - Una ecuación cuadrática
- ¿Cuáles son las tres formas de resolver una ecuación cuadrática?
- Exprese la Propiedad del Producto Cero.
- Describa el proceso de completar el cuadrado.
- Exprese la fórmula cuadrática.
- ¿Cuál es el discriminante de una ecuación cuadrática?
- Exprese las reglas para trabajar con desigualdades.

- 47. Frecuencia de vibración** La frecuencia  $f$  de vibraciones de una cuerda de violín es inversamente proporcional a su longitud  $L$ . La constante de proporcionalidad  $k$  es positiva y depende de la tensión y densidad de la cuerda.

- Escriba una ecuación que represente esta variación.
- ¿Qué efecto tendrá duplicar la longitud de la cuerda en la frecuencia de su vibración?

- 48. Propagación de una enfermedad** La rapidez  $r$  con la que se propaga una enfermedad en una población de tamaño  $P$  es conjuntamente proporcional al número  $x$  de personas infectadas y del número  $P - x$  que no estén infectadas. Una infección brota en una pequeña ciudad que tiene una población  $P = 5000$ .
- Escriba una ecuación que exprese  $r$  como función de  $x$ .
  - Compare la rapidez de propagación de esta infección cuando 1000 personas están infectadas. ¿Cuál rapidez es más grande? ¿En qué factor?
  - Calcule la rapidez de dispersión cuando toda la población está infectada. ¿Por qué tiene sentido intuitivo esta respuesta?

### ■ DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

- 49. ¿La proporcionalidad lo es todo?** Numerosas leyes de física y química se pueden expresar como proporcionalidades. Dé al menos un ejemplo de una función que ocurre en las ciencias y que *no sea* una proporcionalidad.

20. ¿Cómo se resuelve  
 (a) una desigualdad lineal?  
 (b) una desigualdad no lineal?
21. (a) ¿Cómo se resuelve una ecuación con un valor absoluto?  
 (b) ¿Cómo se resuelve una desigualdad con un valor absoluto?
22. (a) Describa el plano de coordenadas.  
 (b) ¿Cómo se localizan puntos en el plano de coordenadas?
23. Exprese cada fórmula.  
 (a) La Fórmula de la Distancia  
 (b) La Fórmula del Punto Medio
24. Dada una ecuación, ¿cuál es su gráfica?
25. ¿Cómo se encuentran los puntos de intersección de  $x$  y de  $y$  de una gráfica?
26. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro  $(h, k)$  y radio  $r$ .
27. Explique el significado de cada tipo de simetría. ¿Cómo se prueba?  
 (a) Simetría con respecto al eje  $y$
- (b) Simetría con respecto al origen
28. Defina la pendiente de una recta.
29. Escriba cada forma de la ecuación de una recta.  
 (a) La forma punto-pendiente  
 (b) La forma pendiente-intersección
30. (a) ¿Cuál es la ecuación de una recta vertical?  
 (b) ¿Cuál es la ecuación de una recta horizontal?
31. ¿Cuál es la ecuación general de una recta?
32. Dadas unas rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , explique cómo se puede saber si las rectas son  
 (a) paralelas  
 (b) perpendiculares
33. Escriba una ecuación que exprese cada relación.  
 (a)  $y$  es directamente proporcional a  $x$ .  
 (b)  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ .  
 (c)  $z$  es conjuntamente proporcional a  $x$  y a  $y$ .

## EJERCICIOS

1-4 ■ Exprese la propiedad de números reales que se use.

1.  $3x + 2y = 2y + 3x$   
 2.  $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$   
 3.  $4(a + b) = 4a + 4b$   
 4.  $(A + 1)(x + y) = (A + 1)x + (A + 1)y$

5-6 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

5.  $[-2, 6)$       6.  $(-\infty, 4]$

7-8 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

7.  $x \geq 5$       8.  $-1 < x \leq 5$

9-18 ■ Evalúe la expresión.

9.  $|3 - |-9||$       10.  $1 - |1 - |-1||$   
 11.  $2^{-3} - 3^{-2}$       12.  $\sqrt[3]{-125}$   
 13.  $216^{-1/3}$       14.  $64^{2/3}$   
 15.  $\frac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}$       16.  $\sqrt[4]{4} \sqrt[4]{324}$   
 17.  $2^{1/2} 8^{1/2}$       18.  $\sqrt{2} \sqrt{50}$

19-28 ■ Simplifique la expresión.

19.  $\frac{x^2(2x)^4}{x^3}$       20.  $(a^2)^{-3}(a^3b)^2(b^3)^4$   
 21.  $(3xy^2)^3(\frac{2}{3}x^{-1}y)^2$       22.  $\left(\frac{r^2s^{4/3}}{r^{1/3}s}\right)^6$   
 23.  $\sqrt[3]{(x^3y)^2y^4}$       24.  $\sqrt{x^2y^4}$   
 25.  $\left(\frac{9x^3y}{y^{-3}}\right)^{1/2}$       26.  $\left(\frac{x^{-2}y^3}{x^2y}\right)^{-1/2} \left(\frac{x^3y}{y^{1/2}}\right)^2$

- (b) Simetría con respecto al eje  $y$   
 (c) Simetría con respecto al origen

28. Defina la pendiente de una recta.

29. Escriba cada forma de la ecuación de una recta.  
 (a) La forma punto-pendiente  
 (b) La forma pendiente-intersección

30. (a) ¿Cuál es la ecuación de una recta vertical?  
 (b) ¿Cuál es la ecuación de una recta horizontal?

31. ¿Cuál es la ecuación general de una recta?

32. Dadas unas rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , explique cómo se puede saber si las rectas son  
 (a) paralelas  
 (b) perpendiculares

33. Escriba una ecuación que exprese cada relación.

- (a)  $y$  es directamente proporcional a  $x$ .  
 (b)  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ .  
 (c)  $z$  es conjuntamente proporcional a  $x$  y a  $y$ .

27. 
$$\frac{8r^{1/2}s^{-3}}{2r^{-2}s^4} \quad 28. \left(\frac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$$

29. Escriba el número 78,250,000,000 en notación científica.

30. Escriba el número  $2.08 \times 10^{-8}$  en notación decimal ordinaria.

31. Si  $a \approx 0.00000293$ ,  $b \approx 1.582 \times 10^{-14}$  y  $c \approx 2.8064 \times 10^{12}$ , use una calculadora para aproximar el número  $ab/c$ .

32. Si su corazón late 80 veces por minuto y usted vive hasta los 90 años de edad, estime el número de veces que su corazón pulsa durante su vida. Exprese su respuesta en notación científica.

33-48 ■ Factorice la expresión completamente.

33.  $12x^2y^4 - 3xy^5 + 9x^3y^2$       34.  $x^2 - 9x + 18$   
 35.  $x^2 + 3x - 10$       36.  $6x^2 + x - 12$   
 37.  $4t^2 - 13t - 12$       38.  $x^4 - 2x^2 + 1$   
 39.  $25 - 16t^2$       40.  $2y^6 - 32y^2$   
 41.  $x^6 - 1$       42.  $y^3 - 2y^2 - y + 2$   
 43.  $x^{-1/2} - 2x^{1/2} + x^{3/2}$       44.  $a^4b^2 + ab^5$   
 45.  $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$       46.  $8x^3 + y^6$   
 47.  $(x^2 + 2)^{5/2} + 2x(x^2 + 2)^{3/2} + x^2\sqrt{x^2 + 2}$   
 48.  $3x^3 - 2x^2 + 18x - 12$

49-64 ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

49.  $(2x + 1)(3x - 2) - 5(4x - 1)$   
 50.  $(2y - 7)(2y + 7)$   
 51.  $(1 + x)(2 - x) - (3 - x)(3 + x)$   
 52.  $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)$   
 53.  $x^2(x - 2) + x(x - 2)^2$       54.  $\frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 5x + 3}$

55. 
$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1}$$

56. 
$$\frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}$$

57. 
$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 6x + 5} \div \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 1}$$

58. 
$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$
 59. 
$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$$

60. 
$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-x-2}$$

61. 
$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2}$$
 62. 
$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}}$$

63. 
$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$
 (rationalice el denominador)

64. 
$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$
 (rationalice el numerador)

65-80 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

65. 
$$7x - 6 = 4x + 9$$

66. 
$$8 - 2x = 14 + x$$

67. 
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{3x}{3x-6}$$

68. 
$$(x+2)^2 = (x-4)^2$$

69. 
$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

70. 
$$x^2 + 24x + 144 = 0$$

71. 
$$2x^2 + x = 1$$

72. 
$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

73. 
$$4x^3 - 25x = 0$$

74. 
$$x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$$

75. 
$$3x^2 + 4x - 1 = 0$$

76. 
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = 3$$

77. 
$$\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

78. 
$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

79. 
$$|x - 7| = 4$$

80. 
$$|2x - 5| = 9$$

81. El propietario de una tienda vende pasitas en \$3.20 por libra y nueces en \$2.40 por libra. Él decide mezclar las pasitas y nueces y vende 50 lb de la mezcla en \$2.72 por libra. ¿Qué cantidades de pasitas y nueces debe usar?

82. Antonio sale de Kingston a las 2:00 p.m. y viaja en auto a Queensville, a 160 millas de distancia, a 45 mi/h. A las 2:15 p.m. Helen sale de Queensville y va en auto a Kingston a 40 mi/h. ¿A qué hora se encuentran entre sí en la carretera?

83. Una mujer va en bicicleta a 8 mi/h más rápido de lo que corre. Todas las mañanas anda en bicicleta 4 millas y corre  $2\frac{1}{2}$  millas, en un total de 1 hora de ejercicio. ¿Cuál es la velocidad a la que corre?

84. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 20 cm de longitud. La suma de las longitudes de los otros dos lados es 28 cm. Encuentre las longitudes de los otros lados del triángulo.

85. Abbie pinta el doble de rápido que Beth y el triple de rápido que Cathie. Si les toma 60 minutos pintar una sala con las tres trabajadoras juntas, ¿cuánto tiempo tardaría Abbie si ella trabajara sola?

86. La propietaria de una casa desea poner una cerca en tres terrenos de jardín adyacentes, uno para cada uno de sus hijos, como se muestra en la figura. Si cada lote ha de ser de 80 pies<sup>2</sup> de

área y ella tiene a la mano 88 pies de material para la cerca, ¿qué dimensiones debe tener cada lote?



87-94 ■ Resuelva la desigualdad. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto de solución en la recta numérica real.

87. 
$$3x - 2 > -11$$

88. 
$$-1 < 2x + 5 \leq 3$$

89. 
$$x^2 + 4x - 12 > 0$$

90. 
$$x^2 \leq 1$$

91. 
$$\frac{x-4}{x^2-4} \leq 0$$

92. 
$$\frac{5}{x^3 - x^2 - 4x + 4} < 0$$

93. 
$$|x - 5| \leq 3$$

94. 
$$|x - 4| < 0.02$$

95-98 ■ Resuelva gráficamente la ecuación o desigualdad.

95. 
$$x^2 - 4x = 2x + 7$$

96. 
$$\sqrt{x+4} = x^2 - 5$$

97. 
$$4x - 3 \geq x^2$$

98. 
$$x^3 - 4x^2 - 5x > 2$$

99-100 ■ Nos dan dos puntos  $P$  y  $Q$ .(a) Determine  $P$  y  $Q$  en un plano de coordenadas.(b) Encuentre la distancia de  $P$  a  $Q$ .(c) Encuentre el punto medio del segmento  $PQ$ .(d) Trace la recta determinada por  $P$  y  $Q$ , y encuentre su ecuación en forma de pendiente e intersección.(e) Trace la circunferencia que pasa por  $Q$  y tiene centro  $P$ , y encuentre la ecuación de esta circunferencia.

99. 
$$P(2, 0), \quad Q(-5, 12)$$
 100. 
$$P(7, -1), \quad Q(2, -11)$$

101-102 ■ Trace la región dada por el conjunto.

101. 
$$\{(x, y) \mid -4 < x < 4 \quad y \quad -2 < y < 2\}$$

102. 
$$\{(x, y) \mid x \geq 4 \quad \text{or} \quad y \geq 2\}$$

103. ¿Cuál de los puntos  $A(4, 4)$  o  $B(5, 3)$  es más cercano al punto  $C(-1, -3)$ ?104. Encuentre una ecuación del círculo que tenga centro  $(2, -5)$  y radio  $\sqrt{2}$ .105. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro  $(-5, -1)$  y pasa por el origen.106. Encuentre la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos  $P(2, 3)$  y  $Q(-1, 8)$  y tiene el punto medio del segmento  $PQ$  como su centro.

107-110 ■ Determine si la ecuación representa una circunferencia, representa un punto o no tiene gráfica. Si la ecuación es la de una circunferencia, encuentre su centro y radio.

107. 
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$$

108. 
$$2x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = \frac{1}{2}$$

109.  $x^2 + y^2 + 72 = 12x$

110.  $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$

111-118 ■ Pruebe la simetría de la ecuación y trace su gráfica.

111.  $y = 2 - 3x$

112.  $2x - y + 1 = 0$

113.  $x + 3y = 21$

114.  $x = 2y + 12$

115.  $y = 16 - x^2$

116.  $8x + y^2 = 0$

117.  $x = \sqrt{y}$

118.  $y = -\sqrt{1 - x^2}$

119-122 ■ Use calculadora graficadora para graficar la ecuación en un rectángulo de vista apropiado.

119.  $y = x^2 - 6x$

120.  $y = \sqrt{5 - x}$

121.  $y = x^3 - 4x^2 - 5x$

122.  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

123. Encuentre la ecuación para la recta que pasa por los puntos  $(-1, -6)$  y  $(2, -4)$ .

124. Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el punto  $(6, -3)$  y tiene pendiente  $-\frac{1}{2}$ .

125. Encuentre la ecuación para la recta que tiene punto de intersección  $x$  de 4 y punto de intersección  $y$  de 12.

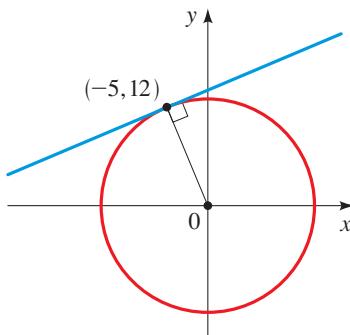
126. Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el punto  $(1, 7)$  y es perpendicular a la recta  $x - 3y + 16 = 0$ .

127. Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta  $3x + 15y = 22$ .

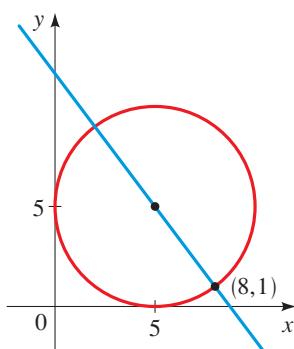
128. Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el punto  $(5, 2)$  y es paralela a la recta que pasa por  $(-1, -3)$  y  $(3, 2)$ .

129-130 ■ Encuentre ecuaciones para la circunferencia y la recta de la figura.

129.



130.



131. La Ley de Hooke dice que si un peso  $w$  se fija a un resorte colgante, entonces la longitud alargada  $s$  del resorte está linealmente relacionada a  $w$ . Para un resorte particular tenemos

$$s = 0.3w + 2.5$$

donde  $s$  se mide en pulgadas y  $w$  en libras.

- (a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección  $s$  en esta ecuación?  
 (b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando se le fija un peso de 5 libras?

132. Margarita es contratada por una empresa de contadores con un salario de \$60,000 por año. Tres años después, su salario anual ha aumentado a \$70,500. Suponga que su salario aumenta linealmente.

- (a) Encuentre una ecuación que relacione el salario anual  $S$  de ella con el número de años  $t$  que ella ha trabajado para la empresa.  
 (b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección  $S$  de la ecuación del salario de Margarita?  
 (c) ¿Cuál será su salario después de 12 años con la empresa?

133. Suponga que  $M$  varía directamente con  $z$ , y  $M = 120$  cuando  $z = 15$ . Escriba una ecuación que exprese esta variación.

134. Suponga que  $z$  es inversamente proporcional a  $y$ , y que  $z = 12$  cuando  $y = 16$ . Escriba una ecuación que exprese  $z$  en términos de  $y$ .

135. La intensidad de iluminación  $I$  de una luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia  $d$  desde la luz.

- (a) Escriba este enunciado como una ecuación.  
 (b) Determine la constante de proporcionalidad si se sabe que una lámpara tiene una intensidad de 1000 candelas a una distancia de 8 metros.  
 (c) ¿Cuál es la intensidad de esta lámpara a una distancia de 20 metros?

136. La frecuencia de una cuerda en vibración bajo constante tensión es inversamente proporcional a su longitud. Si una cuerda de violín de 12 pulgadas de largo vibra 440 veces por segundo, ¿a qué longitud debe acortarse para que vibre 660 veces por segundo?

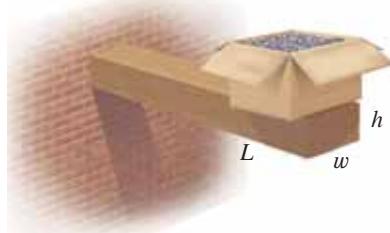
137. La velocidad terminal de un paracaidista es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su peso. Un paracaidista de 160 lb de peso alcanza una velocidad terminal de 9 mi/h. ¿Cuál es la velocidad terminal para un paracaidista que pesa 240 libras?

138. El alcance máximo de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Un lanzador de béisbol lanza una pelota a 60 mi/h, con un alcance máximo de 242 pies. ¿Cuál es este máximo alcance si él lanza la pelota a 70 mi/h?

1. (a) Grafique los intervalos  $(-5, 3]$  y  $(2, \infty)$  sobre la recta de números reales.  
 (b) Exprese las desigualdades  $x \leq 3$  y  $-1 \leq x < 4$  en notación de intervalos.  
 (c) Encuentre la distancia entre  $-7$  y  $9$  sobre la recta de números reales.
2. Evalúe cada una de las expresiones siguientes.  
 (a)  $(-3)^4$       (b)  $-3^4$       (c)  $3^{-4}$       (d)  $\frac{5^{23}}{5^{21}}$       (e)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$       (f)  $16^{-3/4}$
3. Escriba cada uno de estos números en notación científica.  
 (a)  $186,000,000,000$       (b)  $0.0000003965$
4. Simplifique cada expresión. Escriba su respuesta final sin exponentes negativos.  
 (a)  $\sqrt{200} - \sqrt{32}$       (b)  $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$       (c)  $\left(\frac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$   
 (d)  $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$       (e)  $\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{x + 1}{x + 2}$       (f)  $\frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$
5. Racionalice el denominador y simplifique:  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$
6. Realice las operaciones indicadas y simplifique.  
 (a)  $3(x + 6) + 4(2x - 5)$       (b)  $(x + 3)(4x - 5)$       (c)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$   
 (d)  $(2x + 3)^2$       (e)  $(x + 2)^3$
7. Factorice por completo cada expresión.  
 (a)  $4x^2 - 25$       (b)  $2x^2 + 5x - 12$       (c)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$   
 (d)  $x^4 + 27x$       (e)  $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$       (f)  $x^3y - 4xy$
8. Encuentre todas las soluciones reales.  
 (a)  $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$       (b)  $\frac{2x}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x}$       (c)  $x^2 - x - 12 = 0$   
 (d)  $2x^2 + 4x + 1 = 0$       (e)  $\sqrt{3} - \sqrt{x + 5} = 2$       (f)  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$   
 (g)  $3|x - 4| = 10$
9. Mary viajó en auto de Amity a Belleville a una velocidad de 50 mi/h. En el viaje de regreso, manejó a 60 mi/h. El total del viaje duró  $4\frac{2}{5}$  h de tiempo de manejo. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades.
10. Una parcela rectangular de tierras mide 70 pies más larga que su ancho. Cada diagonal entre esquinas opuestas mide 130 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?
11. Resuelva estas desigualdades. Escriba la respuesta usando notación de intervalos y trace la solución en la recta de números reales.  
 (a)  $-4 < 5 - 3x \leq 17$       (b)  $x(x - 1)(x + 2) > 0$   
 (c)  $|x - 4| < 3$       (d)  $\frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$
12. Se ha de almacenar una botella de medicina a una temperatura entre  $5^\circ\text{C}$  y  $10^\circ\text{C}$ . ¿A qué intervalo corresponde esto en la escala Fahrenheit? [Nota: Las temperaturas Fahrenheit ( $F$ ) y Celsius ( $C$ ) satisfacen la relación  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ .]
13. ¿Para qué valores de  $x$  está definida la expresión  $\sqrt{6x - x^2}$  como un número real?
14. Resuelva gráficamente la ecuación y la desigualdad.  
 (a)  $x^3 - 9x - 1 = 0$       (b)  $x^2 - 1 \leq |x + 1|$
15. (a) Localice los puntos  $P(0, 3)$ ,  $Q(3, 0)$  y  $R(6, 3)$  en el plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar ubicado el punto  $S$  para que  $PQRS$  sea un cuadrado?  
 (b) Encuentre el área de  $PQRS$ .
16. (a) Trace la gráfica de  $y = x^2 - 4$ .  
 (b) Encuentre los puntos de intersección  $x$  y  $y$  de la gráfica.  
 (c) ¿La gráfica es simétrica alrededor del eje  $x$ , del eje  $y$  o del origen?

17. Sean  $P(-3, 1)$  y  $Q(5, 6)$  dos puntos en el plano de coordenadas.
- Localice  $P$  y  $Q$  en el plano de coordenadas.
  - Encuentre la distancia entre  $P$  y  $Q$ .
  - Encuentre el punto medio del segmento  $PQ$ .
  - Encuentre la pendiente de la recta que contenga a  $P$  y  $Q$ .
  - Encuentre el bisector perpendicular de la recta que contenga a  $P$  y  $Q$ .
  - Encuentre la ecuación para la circunferencia para el que el segmento  $PQ$  es un diámetro.
18. Encuentre el centro y radio de cada circunferencia y trace su gráfica.
- $x^2 + y^2 = 25$
  - $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$
  - $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$
19. Escriba una ecuación lineal  $2x - 3y = 15$  en forma de pendiente e intersección, y trace su gráfica. ¿Cuáles son la pendiente y el punto de intersección  $y$ ?
20. Encuentre una ecuación para la recta con la propiedad dada.
- Pasa por el punto  $(3, -6)$  y es paralela a la recta  $3x + y - 10 = 0$ .
  - Tiene punto de intersección  $x$  en 6 y punto de intersección  $y$  en 4.
21. Un geólogo usa una sonda para medir la temperatura  $T$  (en  $^{\circ}\text{C}$ ) del suelo, a varias profundidades debajo de la superficie, y encuentra que a una profundidad de  $x$  centímetros la temperatura está dada por la ecuación lineal  $T = 0.08x - 4$ .
- ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de 1 metro (100 cm)?
  - Trace una gráfica de la ecuación lineal.
  - ¿Qué representan la pendiente, la intersección en  $x$  y la intersección  $T$  de la gráfica de esta ecuación?
22. El peso máximo  $M$  que puede ser soportado por una viga es conjuntamente proporcional a su ancho  $w$  y el cuadrado de su altura  $h$ , e inversamente proporcional a su longitud  $L$ .
- Escriba una ecuación que exprese esta proporcionalidad.
  - Determine la constante de proporcionalidad si una viga de 4 pulg. de ancho, 6 pulg. de alto y 12 pies de largo puede soportar un peso de 4800 libras.
  - Si una viga de 10 pies hecha del mismo material mide 3 pulg. de ancho y 10 pulg. de alto, ¿cuál es el peso máximo que puede soportar?

*Si usted tuvo dificultad con cualquiera de estos problemas, puede repasar la sección de este capítulo que se indica a continuación.*



**Si usted tuvo dificultad con este problema de examen**

	<b>Repase esta sección</b>
1	Sección 1.1
2, 3, 4(a), 4(b), 4(c)	Sección 1.2
4(d), 4(e), 4(f), 5	Sección 1.4
6, 7	Sección 1.3
8	Sección 1.5
9, 10	Sección 1.6
11, 12, 13	Sección 1.7
14	Sección 1.9
15, 16, 17(a), 17(b)	Sección 1.8
17(c), 17(d)	Sección 1.10
17(e), 17(f), 18	Sección 1.8
19, 20, 21	Sección 1.10
22	Sección 1.11

# Ajuste lineal de datos

Un modelo es una representación de un objeto o un proceso. Por ejemplo, un Ferrari de juguete es un modelo del auto real; un mapa de caminos es un modelo de las calles en una ciudad. Un **modelo matemático** es una representación matemática (por lo general una ecuación) de un objeto o proceso. Una vez hecho un modelo matemático, éste se puede usar para obtener información útil o hacer predicciones acerca de lo que esté siendo modelado. En estas secciones de *Enfoque sobre modelado* exploramos diferentes formas en las que se pueden usar matemáticas para modelar fenómenos reales.

## ▼ La recta que mejor se ajusta a los datos



En la Sección 1.10 usamos ecuaciones lineales para modelar relaciones entre cantidades variables. En la práctica estas relaciones se descubren al recolectar datos, pero los datos reales raras veces caen en una recta precisa. La **gráfica de dispersión** de la Figura 1(a) muestra el resultado de un estudio acerca de la obesidad infantil. La gráfica determina el índice de masa corporal (BMI) contra el número de horas al día de ver televisión para 25 adolescentes. Desde luego que no esperaríamos que los datos fueran exactamente lineales como en la Figura 1(b), pero hay una *tendencia lineal* indicada por la recta azul de la Figura 1(a): a más horas que un adolescente ve televisión, más alto es el BMI. En esta sección aprenderemos a hallar la recta que mejor se ajusta a los datos.

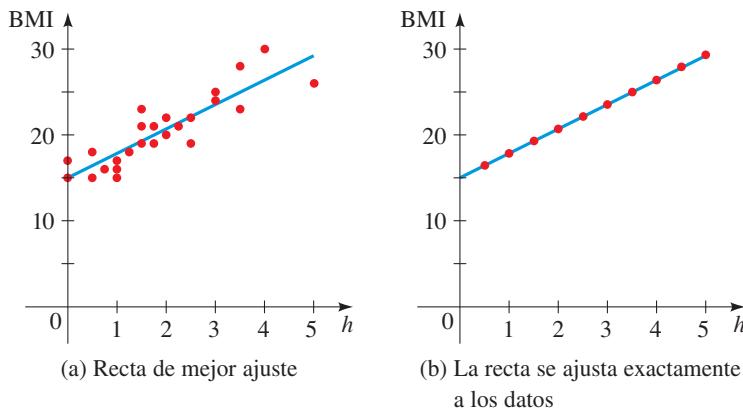


FIGURA 1

La Tabla 1 da la tasa de mortalidad infantil en todo el país para el período de 1950 a 2000. La *tasa* es el número de infantes que mueren antes de llegar a su primer año de vida, contado por cada 1000 niños nacidos vivos.

**TABLA 1**  
Mortalidad infantil en Estados Unidos

Año	Tasa
1950	29.2
1960	26.0
1970	20.0
1980	12.6
1990	9.2
2000	6.9

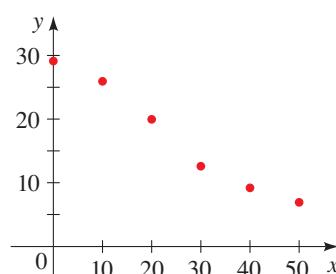
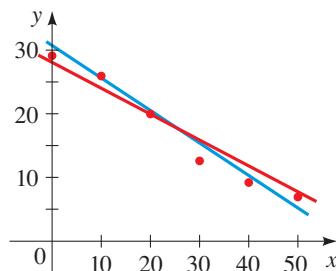


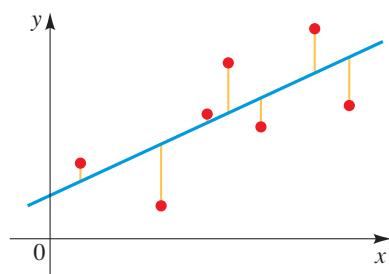
FIGURA 2 Tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos

La gráfica de dispersión de la Figura 2 muestra que los datos están aproximadamente en una línea recta. Podemos tratar de ajustar una recta visualmente para aproximar los puntos de datos, pero como los datos no son *exactamente* lineales, hay muchas rectas que podría

parecer que funcionan. La Figura 3 presenta dos aspectos de “visualizar” una recta para ajustarse a los datos.



**FIGURA 3** Intentos visuales para ajustar la recta a los datos



**FIGURA 4** Distancia de los puntos de datos a la recta

De todas las rectas que pasan por estos puntos de datos hay una que “mejor” se ajusta a los datos, en el sentido de que da el modelo lineal más preciso para los datos. A continuación describimos cómo hallar esta recta.

Parece razonable que la recta de mejor ajuste es aquella tan cercana como sea posible a todos los puntos de datos. Ésta es la recta para la cual la suma de las distancias verticales de los puntos de datos a la recta es tan pequeña como sea posible (vea Figura 4). Por razones técnicas es mejor usar la recta donde la suma de los cuadrados de estas distancias sea la más pequeña. Ésta se denomina **recta de regresión**. La fórmula para la recta de regresión se encuentra por medio de cálculo, pero afortunadamente la fórmula está programada en casi todas las calculadoras graficadoras. En el Ejemplo 1 vemos cómo usar una calculadora TI-83 para hallar la recta de regresión para los datos de mortalidad infantil descritos líneas antes. (El proceso para otras calculadoras es similar.)

### EJEMPLO 1 | Recta de regresión para tasas de mortalidad infantil en Estados Unidos

- Encuentre la recta de regresión para los datos de mortalidad infantil de la Tabla 1.
- Grafe la recta de regresión en una gráfica de dispersión de los datos.
- Use la recta de regresión para estimar las tasas de mortalidad infantil en 1995 y 2006.

#### SOLUCIÓN

- Para hallar la recta de regresión usando una calculadora TI-83, primero debemos ingresar los datos en las listas  $L_1$  y  $L_2$  a las que se tiene acceso presionando la tecla **STAT** y seleccionando **Edit**. La Figura 5 muestra la pantalla de la calculadora después de ingresar los datos. (Observe que estamos haciendo  $x = 0$  correspondiente al año 1950, de modo que  $x = 50$  corresponde a 2000. Esto hace que las ecuaciones sean más fáciles de trabajar.) A continuación presionamos la tecla **STAT** otra vez para seleccionar **Calc**, en seguida **4:LinReg(ax+b)**, que da la salida visualizada en la Figura 6(a). Esto nos dice que la recta de regresión es

$$y = -0.48x + 29.4$$

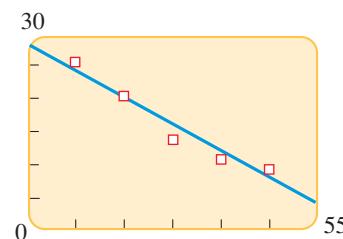
Aquí  $x$  representa el número de años desde 1950, y  $y$  representa la tasa de mortalidad infantil correspondiente.

- La gráfica de dispersión y la recta de regresión han sido determinadas en la pantalla de una calculadora graficadora en la Figura 6(b).

L1	L2	L3	1
0	29.2	-----	
10	26		
20	20		
30	12.6		
40	9.2		
50	6.9		
-----			
L2(7)=			

**FIGURA 5** Ingreso de los datos

**LinReg**  
 $y = ax + b$   
 $a = -0.4837142857$   
 $b = 29.40952381$



**FIGURA 6**

(a) Salida del comando **LinReg**

(b) Gráfica de dispersión y recta de regresión

- (c) El año 1995 es 45 años después de 1950, de manera que sustituyendo por  $x$  encontramos que  $y = -0.48(45) + 29.4 = 7.8$ . Por lo tanto, la tasa de mortalidad infantil en 1995 fue alrededor de 7.8. Análogamente, sustituyendo 56 por  $x$ , encontramos que la tasa de mortalidad infantil pronosticada para 2006 fue de aproximadamente  $-0.48(56) + 29.4 \approx 2.5$ .

Una búsqueda en Internet muestra que la verdadera tasa de mortalidad infantil fue de 7.6 en 1995 y 6.4 en 2006. Entonces, la recta de regresión es suficientemente precisa para 1995 (la tasa real fue un poco menor que la tasa pronosticada), pero está muy alejada para 2006 (la tasa real fue más del doble de la tasa pronosticada). La razón es que la tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos dejó de bajar y en realidad empezó a subir en 2002, por primera vez en más de un siglo. Esto muestra que debemos ser cuidadosos al extrapolar modelos lineales fuera del dominio sobre el cual están dispersos los datos.



AP Photo/Michael Probst

Steven Hooker, ganador de la medalla de oro olímpica de 2008, en salto con pértiga para hombres

## ▼ Ejemplos de análisis de regresión

Desde que comenzaron los Juegos Olímpicos en 1896, los avances en eventos de pista y campo han estado mejorando constantemente. Un ejemplo en el que los récords ganadores han presentado una tendencia lineal ascendente es el salto con pértiga. El salto con pértiga empezó en Holanda como actividad práctica: al viajar de una población a otra, las personas saltaban los muchos canales que cruzaban la zona para evitar tener que salirse de su camino y hallar un puente. Las familias tenían a la mano un buen abasto de maderos de longitudes apropiadas para cada miembro de la familia. El salto de altura con pértiga, en lugar de distancia, se convirtió en un evento universitario de pista y campo hacia mediados del siglo XIX y fue uno de los eventos de los primeros Juegos Olímpicos modernos. En el siguiente ejemplo vemos un modelo lineal para récords ganadores de medalla de oro en Juegos Olímpicos, en el salto de altura con pértiga para hombres.

### EJEMPLO 2 | Recta de regresión para récords olímpicos de salto de altura con pértiga

La Tabla 2 da los récords olímpicos de salto de altura con pértiga para hombres, hasta 2004.

- Encuentre la recta de regresión para los datos.
- Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser apropiada para modelar los datos?
- ¿Qué representa la pendiente de la recta de regresión?
- Use el modelo para predecir la altura ganadora de salto con pértiga para los Juegos Olímpicos de 2008.

TABLA 2

Récords olímpicos de salto con pértiga para hombres

Año	$x$	Medallista de oro	Altura (m)	Año	$x$	Medallista de oro	Altura (m)
1896	-4	William Hoyt, USA	3.30	1956	56	Robert Richards, USA	4.56
1900	0	Irving Baxter, USA	3.30	1960	60	Don Bragg, USA	4.70
1904	4	Charles Dvorak, USA	3.50	1964	64	Fred Hansen, USA	5.10
1906	6	Fernand Gonder, France	3.50	1968	68	Bob Seagren, USA	5.40
1908	8	A. Gilbert, E. Cook, USA	3.71	1972	72	W. Nordwig, E. Germany	5.64
1912	12	Harry Babcock, USA	3.95	1976	76	Tadeusz Slusarski, Poland	5.64
1920	20	Frank Foss, USA	4.09	1980	80	W. Kozakiewicz, Poland	5.78
1924	24	Lee Barnes, USA	3.95	1984	84	Pierre Quinon, France	5.75
1928	28	Sabin Can, USA	4.20	1988	88	Sergei Bubka, USSR	5.90
1932	32	William Miller, USA	4.31	1992	92	M. Tarassob, Unified Team	5.87
1936	36	Earle Meadows, USA	4.35	1996	96	Jean Jaffione, France	5.92
1948	48	Guinn Smith, USA	4.30	2000	100	Nick Hysong, USA	5.90
1952	52	Robert Richards, USA	4.55	2004	104	Timothy Mack, USA	5.95

```

LinReg
y=ax+b
a=.0265652857
b=3.400989881

```

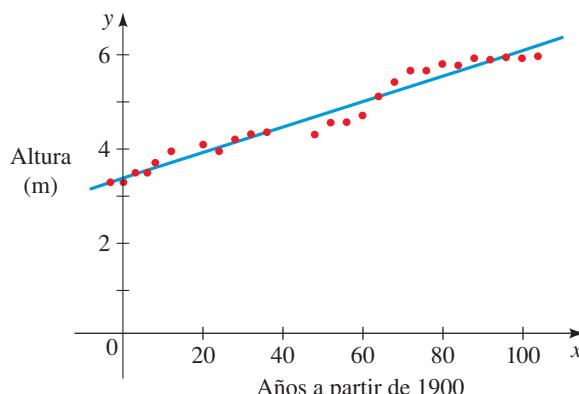
Salida en la función LinReg en la TI-83

### SOLUCIÓN

- (a) Sea  $x = \text{año} - 1900$ , de modo que 1896 corresponde a  $x = -4$ , 1900 a  $x = 0$  y así sucesivamente. Usando calculadora, encontramos la siguiente recta de regresión:

$$y = 0.0266x + 3.40$$

- (b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión se ilustran en la Figura 7. La recta de regresión parece ser un buen modelo para los datos.
- (c) La pendiente es el promedio de porcentaje de aumento en el récord de salto con pértiga por año. Entonces, en promedio, el récord de salto con pértiga aumentó en 0.0266 m/año.



**FIGURA 7** Gráfica de dispersión y recta de regresión para los datos de salto con pértiga

- (d) El año 2008 corresponde a  $x = 108$  en nuestro modelo. El modelo da

$$\begin{aligned} y &= 0.0266(108) + 3.40 \\ &\approx 6.27 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo predice que en 2008 el salto con pértiga ganador será de 6.27 m. ■

En los Juegos Olímpicos de 2008 en Beijing, China, la medalla de oro olímpica en el salto con pértiga fue ganada por Steven Hooker de Australia, con un salto de 5.96 metros. Aun cuando esta altura estableció un récord olímpico, fue considerablemente más bajo que los 6.27 m pronosticados por el modelo del Ejemplo 2. En el Problema 10 vemos una recta de regresión para los datos de salto con pértiga de 1972 a 2004. Haga usted el problema para ver si este conjunto restringido de datos más recientes da un mejor pronóstico para el récord de 2008.

¿Un modelo lineal es realmente apropiado para los datos del Ejemplo 2? En subsiguientes secciones de *Enfoque sobre modelado* estudiamos modelos de regresión que usan otros tipos de funciones, y aprendemos a escoger el mejor modelo para un conjunto determinado de datos.

En el siguiente ejemplo vemos cómo se usa regresión lineal en investigación médica para investigar potenciales causas de enfermedades como el cáncer.

### EJEMPLO 3 Recta de regresión para enlace entre asbesto y cáncer

Cuando ratas de laboratorio son expuestas a fibras de asbesto, algunas ratas presentan tumores pulmonares. La Tabla 3 es una lista de los resultados de varios experimentos realizados por diferentes científicos.

- (a) Encuentre la recta de regresión para los datos.
- (b) Haga una gráfica de dispersión y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser un modelo razonable para los datos?
- (c) ¿Qué representa el punto de intersección y de la recta de regresión?

**TABLA 3**

Datos de tumores causados por asbesto

Exposición al asbesto (fibras/mL)	Porcentaje que presentaba tumores pulmonares
50	2
400	6
500	5
900	10
1100	26
1600	42
1800	37
2000	28
3000	50



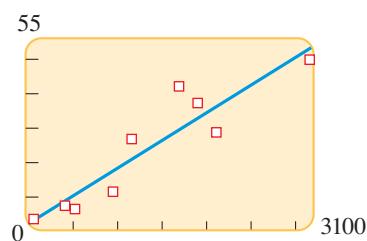
### SOLUCIÓN

(a) Usando calculadora, encontramos la siguiente recta de regresión (vea Figura 8(a)):

$$y = 0.0177x + 0.5405$$

(b) La gráfica de dispersión y recta de regresión están graficadas en la Figura 8(b). La recta de regresión parece ser un modelo razonable para los datos.

**LinReg**  
 $y = ax + b$   
 $a = .0177212141$   
 $b = .5404689256$



(a) Salida del comando **LinReg**

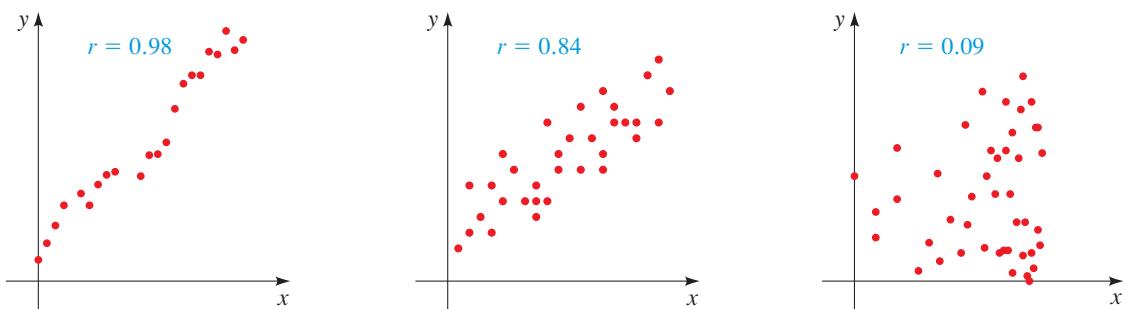
(b) Gráfica de dispersión y recta de regresión

**FIGURA 8** Regresión lineal para los datos de asbesto-tumores

(c) El punto de intersección  $y$  es el porcentaje de ratas a las que se les formaron tumores cuando no había fibras de asbesto presentes. En otras palabras, éste es el porcentaje que normalmente presentan tumores pulmonares (por razones diferentes al asbesto).

### ▼ ¿Qué tan bueno es el ajuste? El coeficiente de correlación

Para cualquier conjunto determinado de datos con dos variables siempre es posible hallar una recta de regresión, incluso si los puntos de datos no tienden a estar en una recta y si las variables parecen no estar relacionadas en absoluto. Veamos las tres gráficas de dispersión de la Figura 9. En la primera gráfica de dispersión, los puntos de datos están cercanos a una recta. En la segunda gráfica, todavía se observa una tendencia lineal pero los puntos están más dispersos. En la tercera gráfica no parece haber ninguna tendencia en absoluto, lineal o de otro tipo.



**FIGURA 9**

Una calculadora graficadora puede darnos una recta de regresión por cada una de estas gráficas de dispersión, pero, ¿qué tan bien representan o “se ajustan” estas líneas a los datos? Para contestar esta pregunta, los expertos en estadística han inventado el **coeficiente de correlación**, por lo general denotado por  $r$ . El coeficiente de correlación es un número entre  $-1$  y  $1$  que mide qué tan cercanamente los datos siguen a la recta de regresión, o bien, en otras palabras, qué tan fuertemente están **correlacionadas** las variables. Numerosas calculadoras dan el valor de  $r$  cuando calculan la recta de regresión. Si  $r$  es cercana a  $-1$  o a  $1$ , entonces las variables están fuertemente correlacionadas, es decir, la gráfica de dispersión sigue muy de cerca a la recta de regresión. Si  $r$  es cercana a  $0$ , entonces las variables están

débilmente correlacionadas o no están correlacionadas para nada. (El signo de  $r$  depende de la pendiente de la recta de regresión.) Los coeficientes de correlación de las gráficas de dispersión de la Figura 9 están indicados en las gráficas. Para la primera gráfica,  $r$  es cercana a 1 porque los datos están muy cercanos a ser lineales. La segunda gráfica también tiene una  $r$  relativamente grande, pero no tan grande como la primera, porque los datos, si bien son bastante lineales, están más difusos. La tercera gráfica tiene una  $r$  cercana a 0, ya que prácticamente no hay tendencia lineal en los datos.

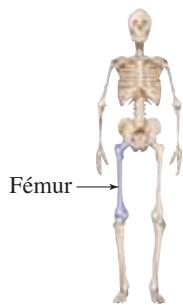
No hay reglas rígidas y rápidas para determinar qué valores de  $r$  son suficientes para decidir que una correlación lineal es “significativa”. El coeficiente de correlación es sólo una guía aproximada para ayudarnos a decidir cuánta fe poner en una determinada recta de regresión. En el Ejemplo 1 el coeficiente de correlación es  $-0.99$ , indicando un muy alto nivel de correlación, por lo cual podemos con seguridad decir que la baja en tasas de mortalidad infantil de 1950 a 2000 fue fuertemente lineal. (El valor de  $r$  es negativo, puesto que la mortalidad infantil tuvo una tendencia *a la baja* en este período.) En el Ejemplo 3 el coeficiente de correlación es  $0.92$ , que también indica una fuerte correlación entre las variables. Entonces, la exposición al asbesto está claramente asociada con el crecimiento de tumores pulmonares en ratas. ¿Significa esto que el asbesto *causa* cáncer pulmonar?

Si dos variables están correlacionadas, esto no necesariamente significa que un cambio en una variable *causa* un cambio en la otra. Por ejemplo, el matemático John Allen Paulos afirma que la medida en calzado está fuertemente correlacionada con las calificaciones en matemáticas entre niños escolares. ¿Esto significa que los pies grandes causan altas calificaciones en matemáticas? Ciertamente que no, pero la medida en calzado y la facilidad para las matemáticas aumentan independientemente a medida que los niños crecen. Por lo tanto, es importante no saltar a las conclusiones: la correlación y la causa no son lo mismo. La correlación es una útil herramienta para descubrir importantes relaciones de causa y efecto; pero para demostrar una causa debemos explicar el mecanismo por medio del cual una variable afecta a la otra. Por ejemplo, el enlace entre fumar y el cáncer pulmonar fue observado como correlación mucho antes que la ciencia encontrara el mecanismo por el que fumar causa cáncer pulmonar.

## PROBLEMAS

- 1. Longitud del fémur y estatura** Los antropólogos usan un modelo lineal que relaciona la longitud del fémur con la estatura. El modelo permite a un antropólogo determinar la estatura de una persona cuando sólo se encuentra un esqueleto parcial (incluyendo el fémur). En este problema encontramos el modelo al analizar los datos acerca de la longitud del fémur y la estatura para los ocho hombres dados en la tabla.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.
- (c) Un antropólogo encuentra un fémur de 58 cm de longitud. ¿Cuál era la estatura de la persona?



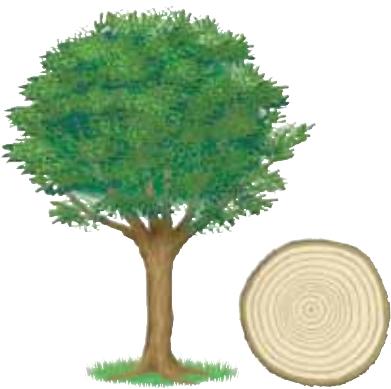
Longitud del fémur (cm)	Estatura (cm)
50.1	178.5
48.3	173.6
45.2	164.8
44.7	163.7
44.5	168.3
42.7	165.0
39.5	155.4
38.0	155.8

- 2. Demanda de bebidas gaseosas** El gerente de una tienda de conveniencia observa que las ventas de bebidas gaseosas son más altas en días calurosos, de modo que reúne los datos de la tabla.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.

- (c) Use el modelo para predecir las ventas de gaseosas si la temperatura es de 95°F.

Temperatura alta (°F)	Número de latas vendidas
55	340
58	335
64	410
68	460
70	450
75	610
80	735
84	780



- 3. Diámetro de un árbol y su edad** Para estimar las edades de árboles, los guardabosques usan un modelo lineal que relaciona el diámetro de un árbol con la edad del mismo. El modelo es útil porque el diámetro de un árbol es mucho más fácil de medir que la edad (que requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal representativa del árbol y contar los anillos). Para hallar el modelo, use los datos de la tabla, que fueron recolectados para una cierta variedad de robles.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.  
 (b) Encuentre y grafique una función que modele los datos.  
 (c) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 18 pulgadas.

Diámetro (pulg.)	Edad (años)
2.5	15
4.0	24
6.0	32
8.0	56
9.0	49
9.5	76
12.5	90
15.5	89

- 4. Niveles de dióxido de carbono** El Observatorio de Mauna Loa, ubicado en la isla de Hawaii, ha estado observando niveles de dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) en la atmósfera desde 1958. La tabla es una lista del promedio anual de niveles de  $\text{CO}_2$  medidos en partes por millón (ppm) de 1984 a 2006.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.  
 (b) Encuentre y grafique la recta de regresión.  
 (c) Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar el nivel de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera en 2005. Compare su respuesta con el nivel real de  $\text{CO}_2$  de 379.7 que fue medido en 2005.

Año	Nivel de $\text{CO}_2$ (ppm)
1984	344.3
1986	347.0
1988	351.3
1990	354.0
1992	356.3
1994	358.9
1996	362.7
1998	366.5
2000	369.4
2002	372.0
2004	377.5
2006	380.9

Temperatura (°F)	Frecuencia de chirridos (chirridos/minuto)
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

- 5. Temperatura y chirridos que chirrían** Unos biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie parece estar relacionada con la temperatura. La tabla siguiente muestra las frecuencias de chirridos para varias temperaturas.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
- (c) Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la frecuencia de chirridos a 100°F.

- 6. Extensión del hielo del Océano Ártico** El Centro Nacional de Información de Nieve y Hielo monitorea la cantidad de hielo del Ártico todo el año. La tabla siguiente da valores aproximados para la extensión del hielo marino en millones de kilómetros cuadrados de 1980 a 2006, en intervalos de dos años.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
- (c) Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la extensión del hielo en el año 2010.

Año	Extensión del hielo (millones de km <sup>2</sup> )	Año	Extensión del hielo (millones de km <sup>2</sup> )
1980	7.9	1994	7.1
1982	7.4	1996	7.9
1984	7.2	1998	6.6
1986	7.6	2000	6.3
1988	7.5	2002	6.0
1990	6.2	2004	6.1
1992	7.6	2006	5.7

Porcentaje de flujo (%)	Porcentaje positivo de mosquitos (%)
0	22
10	16
40	12
60	11
90	6
100	2

- 7. Prevalencia de mosquitos** La tabla siguiente es una lista de la abundancia relativa de mosquitos (medida por el porcentaje positivo de mosquitos) contra la rapidez de flujo (medida como porcentaje del flujo máximo) de redes de canales en la ciudad de Saga, Japón.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
- (c) Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar el porcentaje positivo de mosquitos si el flujo del canal es 70% del máximo.

- 8. Ruido e inteligencia** Expertos en audiolología estudian la inteligibilidad de oraciones habladas bajo diferentes niveles de ruido. La inteligibilidad, calificación de una MRT (imagen de resonancia magnética), se mide como porcentaje de una oración pronunciada y que el escucha puede descifrar a cierto nivel de ruido en decibeles (dB). La tabla muestra los resultados de uno de dichos exámenes.

- (a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
- (c) Encuentre el coeficiente de correlación. ¿Es apropiado un modelo lineal?
- (d) Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la inteligibilidad de una oración a un nivel de ruido de 94 dB.

Nivel de ruido (dB)	Calificación en MRT (%)
80	99
84	91
88	84
92	70
96	47
100	23
104	11

**9. Esperanza de vida** El promedio de esperanza de vida en Estados Unidos ha estado aumentando constantemente en las últimas décadas, como se ve en la tabla siguiente.

- Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- Encuentre y grafique la recta de regresión.
- Use el modelo lineal que encontró en la parte (b) para predecir la esperanza de vida en el año 2006.
- Busque en la Internet o en la biblioteca de su plantel para hallar el promedio real de esperanza de vida en 2006. Compare con su respuesta de la parte (c).

Año	Esperanza de vida
1920	54.1
1930	59.7
1940	62.9
1950	68.2
1960	69.7
1970	70.8
1980	73.7
1990	75.4
2000	76.9

**10. Salto con pértiga en Juegos Olímpicos** La gráfica de la Figura 7 indica que en años recientes la altura ganadora de salto con pértiga para hombres, en Juegos Olímpicos, ha caído por debajo del valor pronosticado por la recta de regresión del Ejemplo 2. Esto podría haber ocurrido porque cuando el salto con pértiga era un evento nuevo, había mucho más espacio para mejorar en la actuación de los deportistas de esta especialidad, mientras que ahora hasta el mejor entrenamiento puede dar avances apenas incrementales. Veamos si al concentrarnos en resultados más recientes resulta un mejor pronóstico de futuros récords.

- Use los datos de la Tabla 2 para completar la tabla de alturas ganadoras de salto con pértiga. (Observe que estamos usando  $x = 0$  para que corresponda al año 1972, donde empieza este conjunto restringido de datos.)
- Encuentre la recta de regresión para los datos de la parte (a).
- Localice los datos y la recta de regresión en los mismos ejes. ¿La recta de regresión parece dar un buen modelo para los datos?
- ¿Cuál predice la recta de regresión como altura ganadora de salto con pértiga para los Juegos Olímpicos de 2008? Compare este valor pronosticado con la altura ganadora real de 2008 de 5.96 metros, como se describe en la página 133. ¿Esta nueva recta de regresión ha dado un mejor pronóstico que la recta del Ejemplo 2?

Año	$x$	Altura (m)
1972	0	5.64
1976	4	
1980	8	
1984		
1988		
1992		
1996		
2000		
2004		

**11. Récords olímpicos de natación** Las tablas siguientes dan los tiempos de medalla de oro en el evento de natación de 100 metros estilo libre, en Juegos Olímpicos, para hombres y mujeres.

- (a) Encuentre las rectas de regresión para los datos de hombres y de mujeres.  
 (b) Trace ambas rectas de regresión en la misma gráfica. ¿Cuándo predicen estas rectas que las mujeres superarán a los hombres en el evento? ¿Esta conclusión parece razonable?

HOMBRES

Año	Medallista de oro	Tiempo (s)
1908	C. Daniels, USA	65.6
1912	D. Kahanamoku, USA	63.4
1920	D. Kahanamoku, USA	61.4
1924	J. Weissmuller, USA	59.0
1928	J. Weissmuller, USA	58.6
1932	Y. Miyazaki, Japan	58.2
1936	F. Csik, Hungary	57.6
1948	W. Ris, USA	57.3
1952	C. Scholes, USA	57.4
1956	J. Henricks, Australia	55.4
1960	J. Devitt, Australia	55.2
1964	D. Schollander, USA	53.4
1968	M. Wenden, Australia	52.2
1972	M. Spitz, USA	51.22
1976	J. Montgomery, USA	49.99
1980	J. Woithe, E. Germany	50.40
1984	R. Gaines, USA	49.80
1988	M. Biondi, USA	48.63
1992	A. Popov, Russia	49.02
1996	A. Popov, Russia	48.74
2000	P. van den Hoogenband, Netherlands	48.30
2004	P. van den Hoogenband, Netherlands	48.17
2008	A. Bernard, France	47.21

MUJERES

Año	Medallista de oro	Tiempo (s)
1912	F. Durack, Australia	82.2
1920	E. Bleibtrey, USA	73.6
1924	E. Lackie, USA	72.4
1928	A. Osipowich, USA	71.0
1932	H. Madison, USA	66.8
1936	H. Mastenbroek, Holland	65.9
1948	G. Andersen, Denmark	66.3
1952	K. Szoke, Hungary	66.8
1956	D. Fraser, Australia	62.0
1960	D. Fraser, Australia	61.2
1964	D. Fraser, Australia	59.5
1968	J. Henne, USA	60.0
1972	S. Nielson, USA	58.59
1976	K. Ender, E. Germany	55.65
1980	B. Krause, E. Germany	54.79
1984	(Tie) C. Steinseifer, USA N. Hogshead, USA	55.92
1988	K. Otto, E. Germany	54.93
1992	Z. Yong, China	54.64
1996	L. Jingyi, China	54.50
2000	I. DeBruijn, Netherlands	53.83
2004	J. Henry, Australia	53.84
2008	B. Steffen, Germany	53.12

**12. Medida de calzado y estatura** ¿Piensa usted que la medida del calzado y la estatura están correlacionadas? Investigue al estudiar las medidas de calzado y estaturas de personas de su grupo en la universidad. (Desde luego, los datos para hombres y mujeres deben ser separados.) Encuentre el coeficiente de correlación.

**13. Demanda de barras de dulces** En este problema, usted determinará una ecuación de demanda lineal que describe la demanda de barras de dulces en su grupo en la universidad. Investigue a sus compañeros para determinar qué precio estarían dispuestos a pagar por una barra de dulce. La forma de su estudio podría verse como la muestra de la izquierda.

- (a) Haga una tabla del número de quienes respondieron “sí” a cada nivel de precios.  
 (b) Haga una gráfica de dispersión de sus datos.  
 (c) Encuentre y grafique la recta de regresión  $y = mp + b$ , que da el número  $y$  de quienes respondieron y que comprarían una barra de dulce si el precio fuera de  $p$  centavos. Ésta es la *ecuación de demanda*. ¿Por qué la pendiente  $m$  es negativa?  
 (d) ¿Cuál es el punto de intersección  $p$  de la ecuación de demanda? ¿Qué le dice este punto de intersección acerca de los precios de barras de dulce?

¿Compraría usted una barra de dulce de la máquina expendedora del pasillo, si el precio es como el indicado?

Precio	Sí o no
30¢	
40¢	
50¢	
60¢	
70¢	
80¢	
90¢	
\$1.00	
\$1.10	
\$1.20	





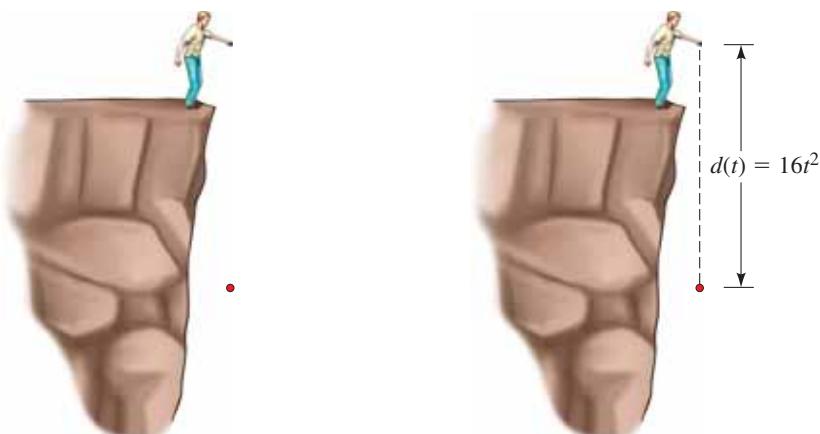
# FUNCIONES

- 2.1** ¿Qué es una función?
- 2.2** Gráficas de funciones
- 2.3** Información a partir de la gráfica de una función
- 2.4** Rapidez de cambio promedio de una función
- 2.5** Transformaciones de funciones
- 2.6** Combinación de funciones
- 2.7** Funciones uno a uno y sus inversas

## ENFOQUE SOBRE MODELADO

Modelado con funciones

Quizá la idea más útil para modelar el mundo real sea el concepto de *función*. Veamos un ejemplo. Si un escalador deja caer una piedra desde un alto risco, sabemos que la piedra caerá. Pero esta descripción general no nos ayuda a saber cuándo llegará la piedra al suelo. Para averiguarlo, necesitamos una *regla* que relacione la distancia  $d$  que cae la piedra y el tiempo que haya estado en caída. Galileo fue el primero en descubrir la regla: en  $t$  segundos la piedra cae  $16t^2$  pies. Esta “regla” se denomina *función*; escribimos esta función como  $d(t) = 16t^2$ . Con el uso de este modelo de función, podemos *predecir* cuándo caerá la piedra al suelo. En este capítulo estudiamos propiedades de funciones y la forma en que los modelos funcionales pueden ayudarnos a obtener información precisa acerca de la cosa o proceso que se esté modelando.



**Descripción general:** La piedra cae.

**Función:** En  $t$  segundos, la piedra cae  $16t^2$  pies.

## 2.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Funciones a nuestro alrededor ► Definición de función ► Evaluación de una función ► Dominio de una función ► Cuatro formas de representar una función

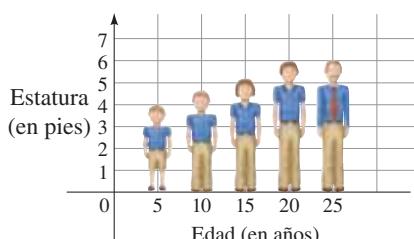
En esta sección exploramos la idea de una función y a continuación damos la definición de función.

### ▼ Funciones a nuestro alrededor

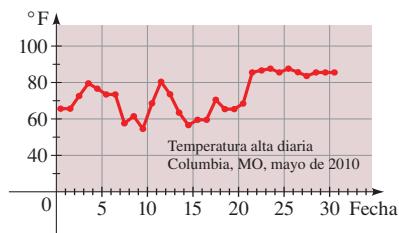
En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.



La estatura es función de la edad.



La temperatura es función de la fecha.

w (onzas)	Porte (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
$5 < w \leq 6$	2.07

El porte es función del peso.

FIGURA 1

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

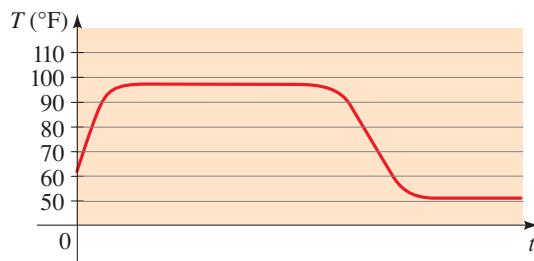
- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área  $A$  de un círculo depende de su radio  $r$  está dada por la fórmula  $A = \pi r^2$ . Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura  $T$  del agua como función del tiempo  $t$  que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura  $T$  del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase,  $T$  es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga,  $T$  disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.





**FIGURA 2** Gráfica de la temperatura  $T$  del agua como función del tiempo  $t$

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

La tecla  $\sqrt{x}$  de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa  $x$  en la pantalla  $y$ , a continuación, se pulsa la tecla marcada como  $\sqrt{x}$ . (En casi todas las calculadoras *grafadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si  $x < 0$ , entonces  $x$  no está en el dominio de esta función; esto es,  $x$  no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si  $x \geq 0$ , entonces aparece una aproximación a  $\sqrt{x}$  en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla  $\sqrt{x}$  de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt{x}$ .)

## ▼ Definición de función

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como  $f, g, h, \dots$  para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra  $f$  para representar una regla como sigue:

“ $f$ ” es la regla “elevar al cuadrado el número”

Cuando escribimos  $f(2)$  queremos decir “aplicar la regla  $f$  al número 2”. La aplicación de la regla da  $f(2) = 2^2 = 4$ . Del mismo modo,  $f(3) = 3^2 = 9, f(4) = 4^2 = 16$ , y en general  $f(x) = x^2$ .

### DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función**  $f$  es una regla que asigna a cada elemento  $x$  de un conjunto  $A$  exactamente un elemento, llamado  $f(x)$ , de un conjunto  $B$ .

Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos  $A$  y  $B$  son conjuntos de números reales. El símbolo  $f(x)$  se lee “ $f$  de  $x$ ” o “ $f$  en  $x$ ” y se denomina **valor de  $f$  en  $x$** , o la **imagen de  $x$  bajo  $f$** . El conjunto  $A$  recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de  $f$  es el conjunto de todos los valores posibles de  $f(x)$  cuando  $x$  varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función  $f$  se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de  $f$  se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos  $y = f(x)$ , entonces  $x$  es la variable independiente y  $y$  es la variable dependiente.

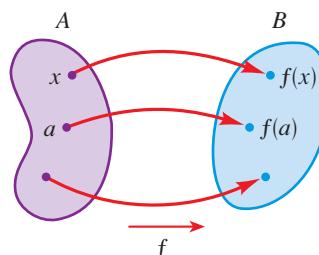
Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si  $x$  está en el dominio de la función  $f$ , entonces cuando  $x$  entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida**  $f(x)$  de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

**FIGURA 3** Diagrama de máquina de  $f$



Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de  $A$  con un elemento de  $B$ . La flecha indica que  $f(x)$  está asociada con  $x$ ,  $f(a)$  está asociada con  $a$ , y así sucesivamente.

**FIGURA 4** Diagrama de flecha de  $f$



**EJEMPLO 1** | Análisis de una función

Una función  $f$  está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

- Expresa verbalmente cómo actúa  $f$  sobre la entrada  $x$  para producir la salida  $f(x)$ .
- Evalue  $f(3)$ ,  $f(-2)$  y  $f(\sqrt{5})$ .
- Encuentre el dominio y rango de  $f$ .
- Trace un diagrama de máquina para  $f$ .

**SOLUCIÓN**

- La fórmula nos dice que  $f$  primero eleva al cuadrado la entrada  $x$  y luego suma 4 al resultado. Por tanto,  $f$  es la función

“elevar al cuadrado, luego sumar 4”

- Los valores de  $f$  se encuentran al sustituir por  $x$  en la fórmula  $f(x) = x^2 + 4$ .

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13 \quad \text{Sustituir } x \text{ por } 3$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \quad \text{Sustituir } x \text{ por } -2$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \quad \text{Sustituir } x \text{ por } \sqrt{5}$$

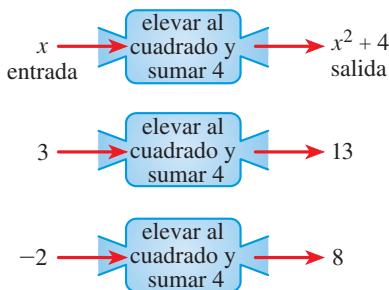


FIGURA 5 Diagrama de máquina

- El dominio de  $f$  está formado por todas las posibles entradas para  $x$ . Como podemos evaluar la fórmula  $f(x) = x^2 + 4$  para cada número real  $x$ , el dominio de  $f$  es el conjunto  $\mathbb{R}$  de todos los números reales.

El rango de  $f$  está formado por todas las posibles salidas de  $f$ . Como  $x^2 \geq 0$  para todos los números reales  $x$ , tenemos  $x^2 + 4 \geq 4$ , de modo que por cada salida de  $f$  tenemos  $f(x) \geq 4$ . Entonces, el rango de  $f$  es  $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$ .

- Un diagrama de máquina para  $f$  se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 9, 13, 17 Y 43

**▼ Evaluación de una función**

En la definición de una función, la variable independiente  $x$  desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función  $f(x) = 3x^2 + x - 5$  se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar  $f$  en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

**EJEMPLO 2** | Evaluación de una función

Sea  $f(x) = 3x^2 + x - 5$ . Evalúe cada valor de la función.

- $f(-2)$
- $f(0)$
- $f(4)$
- $f(\frac{1}{2})$

**SOLUCIÓN** Para evaluar  $f$  en un número, sustituimos el número por  $x$  en la definición de  $f$ .

$$(a) f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$$

$$(b) f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$$

$$(c) f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$$

$$(d) f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19



### EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre  $C(100)$ ,  $C(400)$  y  $C(480)$ .

**SOLUCIÓN** Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada  $x$ . Si  $0 \leq x \leq 400$ , entonces el valor de  $C(x)$  es 39. Por otra parte, si  $x > 400$ , entonces el valor de  $C(x)$  es  $39 + 0.20(x - 400)$ .

Como  $100 \leq 400$ , tenemos  $C(100) = 39$ .

Como  $400 \leq 400$ , tenemos  $C(400) = 39$ .

Como  $480 > 400$ , tenemos  $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$ .

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

Una **función definida por tramos** está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función  $C$  del Ejemplo 3 está definida por tramos.

Expresiones como la del inciso (d) del ejemplo 4 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de  $f$  entre  $x = a$  y  $x = a + h$ .

### EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si  $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ , evalúe lo siguiente.

(a)  $f(a)$

(b)  $f(-a)$

(c)  $f(a + h)$

(d)  $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ ,  $h \neq 0$

**SOLUCIÓN**

(a)  $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(b)  $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(c)  $f(a + h) = 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1$

$$= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1$$

$$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1$$

(d) Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

### EJEMPLO 5 | El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a  $h$  millas sobre la Tierra está dado por la función

$$w(h) = 130 \left( \frac{3960}{3960 + h} \right)^2$$

(a) ¿Cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la Tierra?



El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de ésta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentre en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de “in-gravidez” porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

- (b) Construya una tabla de valores para la función  $w$  que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

### SOLUCIÓN

- (a) Buscamos el valor de la función  $w$  cuando  $h = 100$ ; esto es, debemos calcular  $w(100)$ .

$$w(100) = 130 \left( \frac{3960}{3960 + 100} \right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

- (b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en la parte (a).

$h$	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 71

### ▼ Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \quad 0 \leq x \leq 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales  $x$  para los cuales  $0 \leq x \leq 5$ . Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención el *dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica*, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real. Por ejemplo, considere las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

La función  $f$  no está definida en  $x = 4$ , de modo que su dominio es  $\{x \mid x \neq 4\}$ . La función  $g$  no está definida para  $x$  negativa, de modo que su dominio es  $\{x \mid x \geq 0\}$ .

### EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2 - x} \quad (b) g(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad (c) h(t) = \frac{t}{\sqrt{t + 1}}$$

## SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

vemos que  $f(x)$  no está definida cuando  $x = 0$  o  $x = 1$ . Entonces, el dominio de  $f$  es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener  $9 - x^2 \geq 0$ . Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que  $-3 \leq x \leq 3$ . Por lo tanto, el dominio de  $g$  es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener  $t + 1 > 0$ , es decir,  $t > -1$ . Por lo tanto, el dominio de  $h$  es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 47 Y 51

## ▼ Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

“Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por  $\frac{9}{5}$  la temperatura Celsius y luego sumar 32.”

En el Ejemplo 7 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica, gráfica y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea la caja en la página siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical  $a(t)$  del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función  $C(w)$ , que se describe verbalmente como “el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso  $w$ ”. La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

## CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

### Verbal

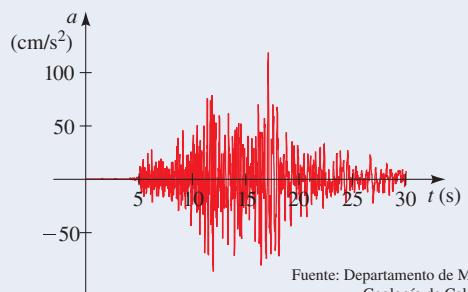
Usando palabras:

“Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por  $\frac{9}{5}$ , luego sumar 32.”

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

### Visual

Usando una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

### Algebraica

Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

### Numérica

Usando una tabla de valores:

<i>w</i> (onzas)	<i>C(w)</i> (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
⋮	⋮

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

### EJEMPLO 7

Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea  $F(C)$  la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius  $C$ . (Así,  $F$  es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

- Algebraicamente (usando una fórmula)
- Numéricamente (usando una tabla de valores)
- Visualmente (usando una gráfica)

### SOLUCIÓN

- La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada  $C$  por  $\frac{9}{5}$  y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

- Usamos la fórmula algebraica para  $F$  que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

<i>C</i> (Celsius)	<i>F</i> (Fahrenheit)
-10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

- (c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.

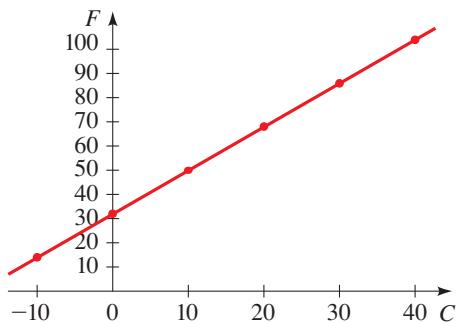


FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 65

## 2.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- Si una función  $f$  está dada por la fórmula  $y = f(x)$ , entonces  $f(a)$  es la \_\_\_\_\_ de  $f$  en  $x = a$ .
- Para una función  $f$ , el conjunto de todas las posibles entradas se denomina \_\_\_\_\_ de  $f$ , y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina \_\_\_\_\_ de  $f$ .
- (a) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?  
 $f(x) = x^2 - 3x$      $g(x) = \frac{x-5}{x}$      $h(x) = \sqrt{x-10}$   
(b) Para las funciones de la parte (a) que tienen 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.
- Una función está dada algebraicamente por la fórmula  $f(x) = (x-4)^2 + 3$ . Complete estas otras formas de representar a  $f$ .
  - Verbal: “Restar 4, luego \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.”
  - Numérica:

$x$	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

### HABILIDADES

- Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla “elevar al cuadrado, luego restar 5” se expresa como la función  $f(x) = x^2 - 5$ .)
- Sumar 3, luego multiplicar por 2
- Dividir entre 7, luego restar 4
- Restar 5, luego elevar al cuadrado
- Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por  $\frac{1}{3}$ .

- 9-12 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

9.  $h(x) = x^2 + 2$     10.  $k(x) = \sqrt{x+2}$   
11.  $f(x) = \frac{x-4}{3}$     12.  $g(x) = \frac{x}{3} - 4$

- 13-14 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

13.  $f(x) = \sqrt{x-1}$     14.  $f(x) = \frac{3}{x-2}$

- 15-16 ■ Complete la tabla.

15.  $f(x) = 2(x-1)^2$     16.  $g(x) = |2x+3|$

$x$	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

$x$	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

- 17-26 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

17.  $f(x) = x^2 - 6$ ;  $f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$   
18.  $f(x) = x^3 + 2x$ ;  $f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$   
19.  $f(x) = 2x + 1$ ;

$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

20.  $f(x) = x^2 + 2x$ ;  
 $f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f(\frac{1}{a})$

21.  $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ;  
 $g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

22. 
$$h(t) = t + \frac{1}{t};$$

$$h(1), h(-1), h(2), h\left(\frac{1}{2}\right), h(x), h\left(\frac{1}{x}\right)$$

23. 
$$f(x) = 2x^2 + 3x - 4;$$

$$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x + 1), f(-x)$$

24. 
$$f(x) = x^3 - 4x^2;$$

$$f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{x}{2}\right), f(x^2)$$

25. 
$$f(x) = 2|x - 1|;$$

$$f(-2), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(2), f(x + 1), f(x^2 + 2)$$

26. 
$$f(x) = \frac{|x|}{x};$$

$$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$$

27-30 ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

27. 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$$

28. 
$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$$

29. 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(-4), f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1), f(0), f(25)$$

30. 
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$$

31-34 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

31. 
$$f(x) = x^2 + 1; \quad f(x + 2), f(x) + f(2)$$

32. 
$$f(x) = 3x - 1; \quad f(2x), 2f(x)$$

33. 
$$f(x) = x + 4; \quad f(x^2), (f(x))^2$$

34. 
$$f(x) = 6x - 18; \quad f\left(\frac{x}{3}\right), \frac{f(x)}{3}$$

35-42 ■ Encuentre  $f(a)$ ,  $f(a + h)$ , y el cociente de diferencias

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
, donde  $h \neq 0$ .

35. 
$$f(x) = 3x + 2$$

36. 
$$f(x) = x^2 + 1$$

37. 
$$f(x) = 5$$

38. 
$$f(x) = \frac{1}{x + 1}$$

39. 
$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

40. 
$$f(x) = \frac{2x}{x - 1}$$

41. 
$$f(x) = 3 - 5x + 4x^2$$

42. 
$$f(x) = x^3$$

43-64 ■ Encuentre el dominio de la función.

43. 
$$f(x) = 2x$$

44. 
$$f(x) = x^2 + 1$$

45. 
$$f(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$$

46. 
$$f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$$

47. 
$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

48. 
$$f(x) = \frac{1}{3x - 6}$$

49. 
$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

50. 
$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + x - 6}$$

51. 
$$f(x) = \sqrt{x - 5}$$

52. 
$$f(x) = \sqrt[4]{x + 9}$$

53. 
$$f(t) = \sqrt[3]{t - 1}$$

54. 
$$g(x) = \sqrt{7 - 3x}$$

55. 
$$h(x) = \sqrt{2x - 5}$$

56. 
$$G(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

57. 
$$g(x) = \frac{\sqrt{2 + x}}{3 - x}$$

58. 
$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$$

59. 
$$g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$$

60. 
$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$$

61. 
$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x - 4}}$$

62. 
$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{6 - x}}$$

63. 
$$f(x) = \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{2x - 1}}$$

64. 
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{9 - x^2}}$$

65-68 ■ Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones (a) algebraica, (b) numérica y (c) gráfica para la función.

65. Para evaluar  $f(x)$ , divida la entrada entre 3 y sume  $\frac{2}{3}$  al resultado.

66. Para evaluar  $g(x)$ , reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por  $\frac{3}{4}$ .

67. Sea  $T(x)$  la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de  $x$  dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

68. Sea  $V(d)$  el volumen de una esfera de diámetro  $d$ . Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por  $\pi$  y divida entre 6.

## APLICACIONES

69. **Costo de producción** El costo  $C$  en dólares por producir  $x$  yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre  $C(10)$  y  $C(100)$ .

(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?

(c) Encuentre  $C(0)$ . (Este número representa los *costos fijos*.)

- 70. Área de una esfera** El área superficial  $S$  de una esfera es una función de su radio  $r$  dado por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

- (a) Encuentre  $S(2)$  y  $S(3)$ .  
 (b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

- 71. Ley de Torricelli** Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de  $t$  minutos como

$$V(t) = 50 \left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \quad 0 \leq t \leq 20$$

- (a) Encuentre  $V(0)$  y  $V(20)$ .  
 (b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?  
 (c) Haga una tabla de valores de  $V(t)$  para  $t = 0, 5, 10, 15, 20$ .



- 72. ¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia  $D$  máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud  $h$  está dada por la función

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

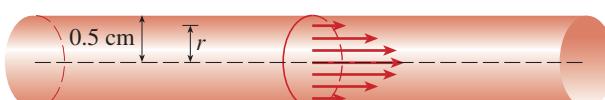
donde  $r = 3960$  millas es el radio de la Tierra y  $D$  y  $h$  se miden en millas.

- (a) Encuentre  $D(0.1)$  y  $D(0.2)$ .  
 (b) ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?  
 (c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

- 73. Circulación sanguínea** Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad  $v$  es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia  $r$  desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da  $v$  como función de  $r$  se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre  $v$  (en cm/s) y  $r$  (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18,500(0.25 - r^2) \quad 0 \leq r \leq 0.5$$

- (a) Encuentre  $v(0, 1)$  y  $v(0, 4)$ .  
 (b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?  
 (c) Haga una tabla de valores de  $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ .

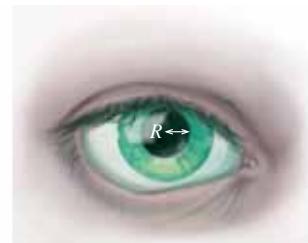


- 74. Tamaño de la pupila** Cuando aumenta la brillantez  $x$  de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio  $R$  de la pupila. La dependencia de  $R$  en  $x$  está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde  $R$  se mide en milímetros y  $x$  se mide en unidades de brillantez apropiadas.

- (a) Encuentre  $R(1)$ ,  $R(10)$  y  $R(100)$ .  
 (b) Haga una tabla de valores de  $R(x)$ .



- 75. Relatividad** Según la Teoría de la Relatividad, la longitud  $L$  de un cuerpo es una función de su velocidad  $v$  con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz (300,000 km/s).

- (a) Encuentre  $L(0.5c)$ ,  $L(0.75c)$  y  $L(0.9c)$ .  
 (b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

- 76. Impuesto sobre la renta** En cierto país, el impuesto sobre la renta  $T$  se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso  $x$ :

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 10,000 \\ 0.08x & \text{si } 10,000 < x \leq 20,000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20,000 < x \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $T(5,000)$ ,  $T(12,000)$ , y  $T(25,000)$ .  
 (b) ¿Qué representan sus respuestas en el inciso (a)?

- 77. Compras por Internet** Una librería de ventas por Internet cobra \$15 por envío de pedidos de menos de \$100 pero no cobra nada por pedidos de \$100 o más. El costo  $C$  de un pedido es una función del precio total  $x$  del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \geq 100 \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $C(75)$ ,  $C(90)$ ,  $C(100)$  y  $C(105)$ .  
 (b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

- 78. Costo de una estancia en hotel** Una cadena hotelera cobra \$75 por noche por las primeras dos noches y \$50 por cada noche adicional de estancia. El costo total  $T$  es una función del número de noches  $x$  que permanezca un huésped.

- (a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} \text{[blue box]} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \text{[blue box]} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- (b) Encuentre  $T(2)$ ,  $T(3)$  y  $T(5)$ .

- (c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

- 79. Boleta de infracción por rebasar límite de velocidad** En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es 40 mi/h. La multa  $F$  por violar estos límites es de \$15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

- (a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por partes, donde  $x$  es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} \text{[blue box]} & \text{si } 0 < x < 40 \\ \text{[blue box]} & \text{si } 40 \leq x \leq 65 \\ \text{[blue box]} & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

- (b) Encuentre  $F(30)$ ,  $F(50)$  y  $F(75)$ .

- (c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

- 80. Altura de césped** El propietario de una casa poda el césped en la tarde de todos los miércoles. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un período de 4 semanas que empieza un domingo.



- 81. Cambio de temperatura** Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, saca el pastel y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

- 82. Cambio diario de temperatura** Las lecturas de temperatura  $T$  (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo  $t$  se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de  $T$  como función de  $t$ .

<b><math>t</math></b>	0	2	4	6	8	10	12
<b><math>T</math></b>	58	57	53	50	51	57	61

- 83. Crecimiento poblacional** La población  $P$  (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de  $P$  como función de  $t$ .

<b><math>t</math></b>	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
<b><math>P</math></b>	733	782	800	817	838	861	895

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 84. Ejemplos de funciones** Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo del porte es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de nuestra vida diaria.

- 85. Cuatro formas de representar una función** En el cuadro de la página 148 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que pueda representarse en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

## 2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Graficar funciones por localización de puntos ► Graficar funciones con calculadora graficadora ► Graficar funciones definidas por tramos ► La prueba de la recta vertical ► Ecuaciones que definen funciones

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

### ▼ Graficar funciones por localización de puntos

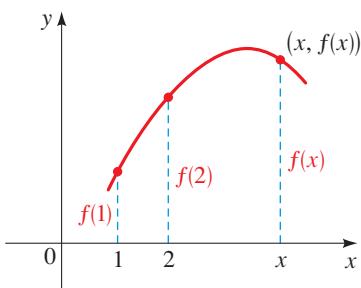
Para graficar una función  $f$ , localizamos los puntos  $(x, f(x))$  en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos  $(x, y)$  cuya coordenada  $x$  es una entrada y cuya coordenada  $y$  es la correspondiente salida de la función.

### LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si  $f$  es una función con dominio  $A$ , entonces la **gráfica** de  $f$  es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

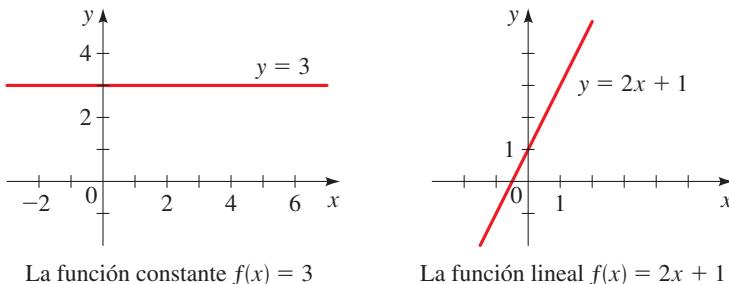
localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de  $f$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  tales que  $y = f(x)$ ; esto es, la gráfica de  $f$  es la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ .



**FIGURA 1** La altura de la gráfica sobre el punto  $x$  es el valor de  $f(x)$ .

La gráfica de una función  $f$  da un retrato del comportamiento o “historia de la vida” de la función. Podemos leer el valor de  $f(x)$  a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto  $x$  (vea Figura 1).

Una función  $f$  de la forma  $f(x) = mx + b$  se denomina **función lineal** porque su gráfica es la gráfica de la ecuación  $y = mx + b$ , que representa una recta con pendiente  $m$  y punto de intersección  $b$  en  $y$ . Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es  $m = 0$ . La función  $f(x) = b$ , donde  $b$  es un número determinado, recibe el nombre de **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, es decir,  $b$ . Su gráfica es la recta horizontal  $y = b$ . La Figura 2 muestra las gráficas de la función constante  $f(x) = 3$  y la función lineal  $f(x) = 2x + 1$ .



**FIGURA 2**

### EJEMPLO 1 | Graficar funciones por localización de puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a)  $f(x) = x^2$       (b)  $g(x) = x^3$       (c)  $h(x) = \sqrt{x}$

**SOLUCIÓN** Primero hacemos una tabla de valores. A continuación, localizamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave sin irregularidades para obtener la gráfica. Las gráficas están trazadas en la Figura 3 en la página siguiente.

$x$	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\pm 1$	1
$\pm 2$	4
$\pm 3$	9

$x$	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

$x$	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

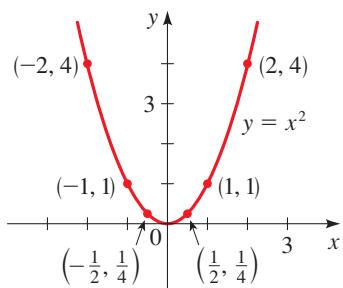
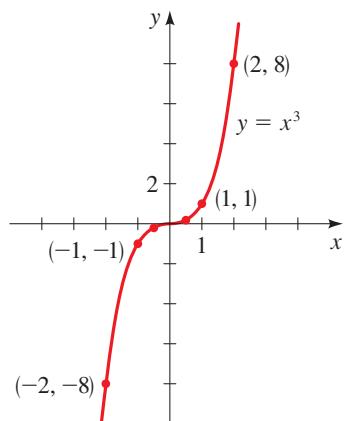
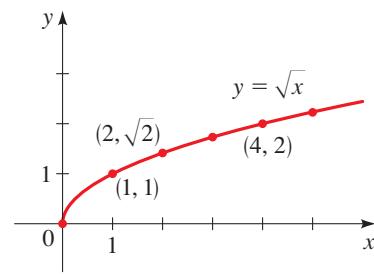


FIGURA 3

(a)  $f(x) = x^2$ (b)  $g(x) = x^3$ (c)  $h(x) = \sqrt{x}$ 

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 11, 15 Y 19

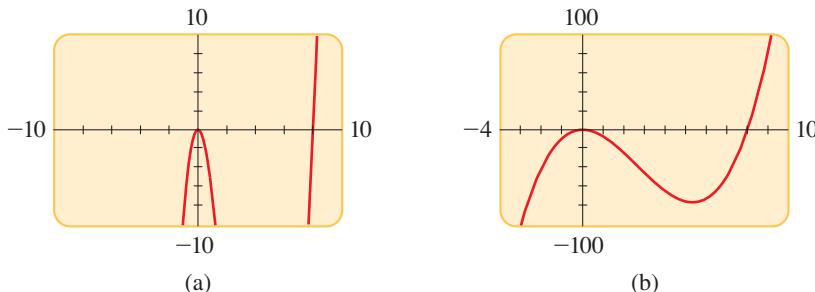
### ▼ Graficar funciones con calculadora graficadora

Una forma cómoda de graficar una función es usar una calculadora graficadora. Como la gráfica de una función  $f$  es la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ , podemos usar los métodos de la Sección 1.9 para graficar funciones en una calculadora graficadora.

#### EJEMPLO 2 | Graficar una función con calculadora graficadora

Use una calculadora graficadora para graficar la función  $f(x) = x^3 - 8x^2$  en un rectángulo de vista apropiado.

**SOLUCIÓN** Para graficar la función  $f(x) = x^3 - 8x^2$ , debemos graficar la ecuación  $y = x^3 - 8x^2$ . En la calculadora graficadora TI-83, el rectángulo de vista predeterminado da la gráfica de la Figura 4(a). Pero esta gráfica parece rebasar la parte superior y la inferior de la pantalla. Necesitamos expandir el eje vertical para obtener una mejor representación de la gráfica. El rectángulo de vista  $[-4, 10]$  por  $[-100, 100]$  da un retrato más completo de la gráfica, como se ve en la Figura 4(b).

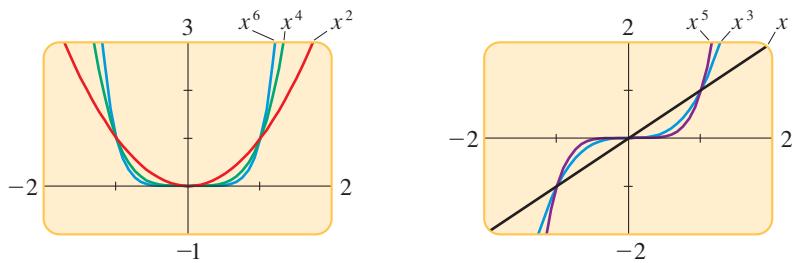
FIGURA 4 Gráfica de la función  $f(x) = x^3 - 8x^2$ 

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

#### EJEMPLO 3 | Una familia de funciones potencia

- Grafique las funciones  $f(x) = x^n$  para  $n = 2, 4$  y  $6$  en el rectángulo de vista  $[-2, 2]$  por  $[-1, 3]$ .
- Grafique las funciones  $f(x) = x^n$  para  $n = 1, 3$  y  $5$  en el rectángulo de vista  $[-2, 2]$  por  $[-2, 2]$ .
- ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas gráficas?

**SOLUCIÓN** Para graficar la función  $f(x) = x^n$ , graficamos la ecuación  $y = x^n$ . Las gráficas para las partes (a) y (b) se muestran en la Figura 5.



**FIGURA 5** Una familia de funciones de potencia  $f(x) = x^n$

(a) Potencias pares de  $x$

(b) Potencias impares de  $x$

(c) Vemos que la forma general de la gráfica de  $f(x) = x^n$  depende de si  $n$  es par o impar.

Si  $n$  es par, la gráfica de  $f(x) = x^n$  es similar a la parábola  $y = x^2$ .

Si  $n$  es impar, la gráfica de  $f(x) = x^n$  es similar a la de  $y = x^3$ .

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69

Observe de la Figura 5 que cuando  $n$  crece, la gráfica de  $y = x^n$  se hace más plana cerca de 0 y más pronunciado cuando  $x > 1$ . Cuando  $0 < x < 1$ , las potencias inferiores de  $x$  son las funciones “más grandes”. Pero cuando  $x > 1$ , las potencias superiores de  $x$  son las funciones dominantes.

## Graficar funciones definidas por tramos

Una función definida por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Como es de esperarse, la gráfica de tal función está formada por tramos separados.

### EJEMPLO 4 | Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de la función.

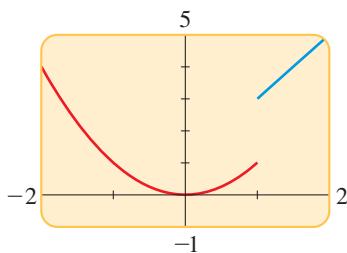
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Si  $x \leq 1$ , entonces  $f(x) = x^2$ , y la parte de la gráfica a la izquierda de  $x = 1$  coincide con la gráfica de  $y = x^2$ , que trazamos en la Figura 3. Si  $x > 1$ , entonces  $f(x) = 2x + 1$ , y la parte de la gráfica a la derecha de  $x = 1$  coincide con la recta  $y = 2x + 1$ , que graficamos en la Figura 2. Esto hace posible que tracemos la gráfica de la Figura 6.

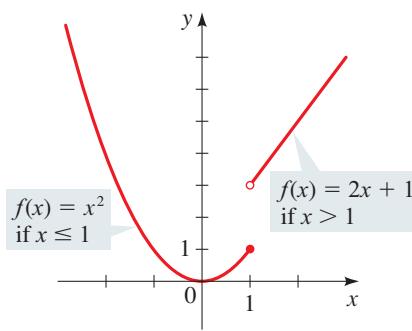
El punto sólido en  $(1, 1)$  indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en  $(1, 3)$  indica que este punto está excluido de la gráfica.

En varias calculadoras graficadoras, la gráfica de la Figura 6 puede ser producida al usar las funciones lógicas de la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

$$Y_1 = (X \leq 1)X^2 + (X > 1)(2X + 1)$$



(Para evitar la recta vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo Dot.)



**FIGURA 6**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

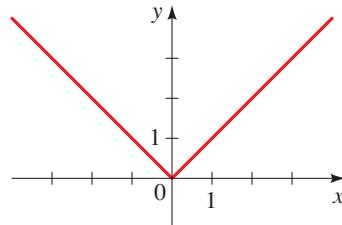
**EJEMPLO 5** | Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto  $f(x) = |x|$ .

**SOLUCIÓN** Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando el mismo método que en el Ejemplo 4, observamos que la gráfica de  $f$  coincide con la recta  $y = x$  a la derecha del eje  $y$  y coincide con la recta  $y = -x$  a la izquierda del eje  $y$  (vea Figura 7).



**FIGURA 7** Gráfica de  $f(x) = |x|$

**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23**

La **función entero** mayor está definida por

$$\llbracket x \rrbracket = \text{máximo entero menor o igual a } x$$

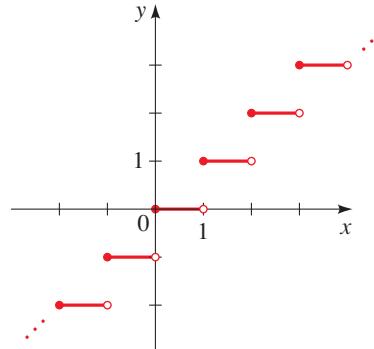
Por ejemplo,  $\llbracket 2 \rrbracket = 2$ ,  $\llbracket 2.3 \rrbracket = 2$ ,  $\llbracket 1.999 \rrbracket = 1$ ,  $\llbracket 0.002 \rrbracket = 0$ ,  $\llbracket -3.5 \rrbracket = -4$ , y  $\llbracket -0.5 \rrbracket = -1$ .

**EJEMPLO 6** | Gráfica de la función entero mayor

Trace la gráfica de  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

**SOLUCIÓN** La tabla muestra los valores de  $f$  para algunos valores de  $x$ . Observe que  $f(x)$  es constante entre enteros consecutivos, de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal, como se ve en la Figura 8.

$x$	$\llbracket x \rrbracket$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

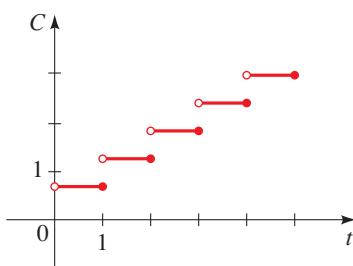


**FIGURA 8** La función entero mayor,  $y = \llbracket x \rrbracket$

La función entero mayor es un ejemplo de una **función escalón**. El siguiente ejemplo da un ejemplo real de una función escalón.

**EJEMPLO 7** | La función de costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica de larga distancia diurna de Toronto, Canadá, a Mumbai, India, es de 69 centavos por el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Trace la gráfica del costo  $C$  (en dólares) de la llamada telefónica como función del tiempo  $t$  (en minutos).



**FIGURA 9** Costo de una llamada de larga distancia

Las funciones continuas están definidas en forma más precisa en la Sección 13.2, en la página 851.

**SOLUCIÓN** Sea  $C(t)$  el costo por  $t$  minutos. Como  $t > 0$ , el dominio de la función es  $(0, \infty)$ . De la información dada tenemos

$$\begin{aligned} C(t) &= 0.69 && \text{si } 0 < t \leq 1 \\ C(t) &= 0.69 + 0.58 = 1.27 && \text{si } 1 < t \leq 2 \\ C(t) &= 0.69 + 2(0.58) = 1.85 && \text{si } 2 < t \leq 3 \\ C(t) &= 0.69 + 3(0.58) = 2.43 && \text{si } 3 < t \leq 4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la Figura 9.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 81

Una función se llama **continua** si su gráfica no tiene “rupturas” o “huecos”. Las funciones de los Ejemplos 1, 2, 3 y 5 son continuas; las funciones de los Ejemplos 4, 6 y 7 no son continuas.

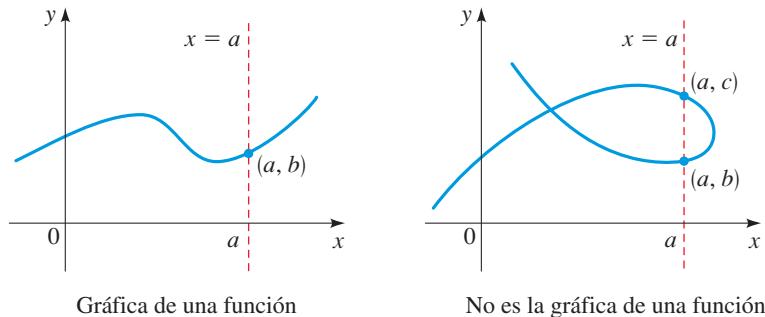
### ▼ La prueba de la recta vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano  $xy$ . Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano  $xy$  son gráficas de funciones? Esto se contesta por medio de la prueba siguiente.

#### LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

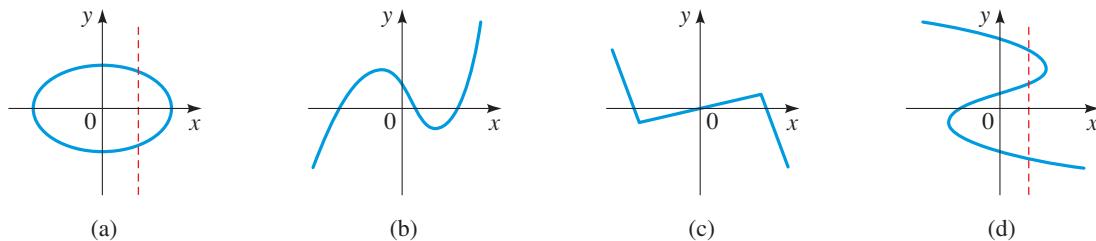
Podemos ver de la Figura 10 por qué la Prueba de la Recta Vertical es verdadera. Si cada recta vertical  $x = a$  cruza la curva sólo una vez en  $(a, b)$ , entonces exactamente un valor funcional está definido por  $f(a) = b$ . Pero si una recta  $x = a$  cruza la curva dos veces, en  $(a, b)$  y en  $(a, c)$ , entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes a  $a$ .



**FIGURA 10** Prueba de la Recta Vertical

### EJEMPLO 8 | Uso de la Prueba de la Recta Vertical

Usando la Prueba de la Recta Vertical, vemos que las curvas en las partes (b) y (c) de la Figura 11 representan funciones, mientras que las de las partes (a) y (d) no la representan.



**FIGURA 11**

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 51

## ▼ Ecuaciones que definen funciones

Cualquier ecuación con las variables  $x$  y  $y$  define una relación entre estas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

define una relación entre  $y$  y  $x$ . ¿Esta ecuación define a  $y$  como *función* de  $x$ ? Para saberlo, despejamos  $y$  y obtenemos

$$y = x^2$$

Vemos que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de  $y$  por cada valor de  $x$ . Podemos expresar esta regla en notación de funciones como

$$f(x) = x^2$$

Pero no toda ecuación define a  $y$  como función de  $x$ , como lo muestra el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 9 | Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a  $y$  como función de  $x$ ?

- (a)  $y - x^2 = 2$       (b)  $x^2 + y^2 = 4$

#### SOLUCIÓN

- (a) Despejando  $y$  en términos de  $x$  tendremos

$$\begin{aligned} y - x^2 &= 2 \\ y &= x^2 + 2 \quad \text{Sume } x^2 \end{aligned}$$

La última ecuación es una regla que da un valor de  $y$  por cada valor de  $x$ , de modo que define a  $y$  como función de  $x$ . Podemos escribir la función como  $f(x) = x^2 + 2$ .

- (b) Intentamos despejar  $y$  en términos de  $x$ :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - x^2 \quad \text{Reste } x^2 \\ y &= \pm \sqrt{4 - x^2} \quad \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

La última ecuación da dos valores de  $y$  por un valor dado de  $x$ . Entonces, la ecuación no define a  $y$  como una función de  $x$ .

#### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 57 Y 61



**DONALD KNOTH** nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de Ciencias de la Computación en la Universidad de Stanford. Cuando Knuth era estudiante de secundaria, quedó fascinado con gráficas de funciones y laboriosamente dibujó cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (Hoy en día, desde luego, es mucho más fácil usar computadoras y calculadoras graficadoras para hacer esto.) Cuando todavía era estudiante graduado en el Caltech, empezó a escribir una monumental serie de libros titulada *The Art of Computer Programming*.

Knuth es famoso por su invento del ENTRA, que es un sistema de ajuste de tipos asistido por computadora. Este sistema fue utilizado en la preparación del manuscrito para este libro.

Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como Profesor Adjunto de la Academia de Ciencias de Francia, y como Miembro de Número de la Royal Society. El presidente Carter le otorgó la Medalla Nacional de Ciencias en 1979.

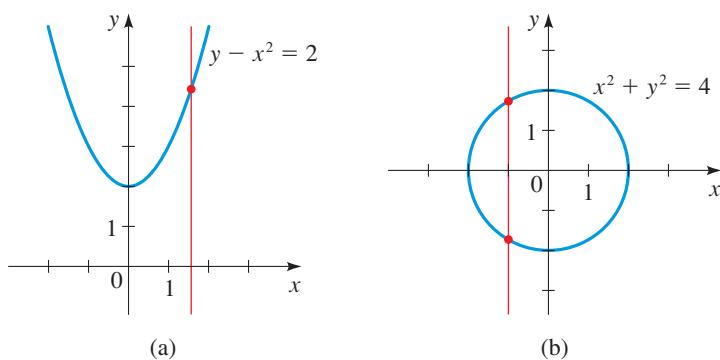


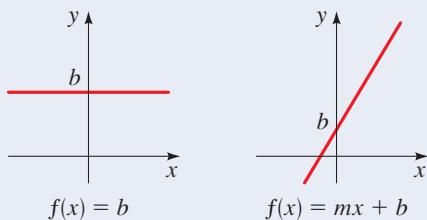
FIGURA 12

La tabla siguiente muestra las gráficas de algunas funciones que con frecuencia se ven en este libro.

### ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

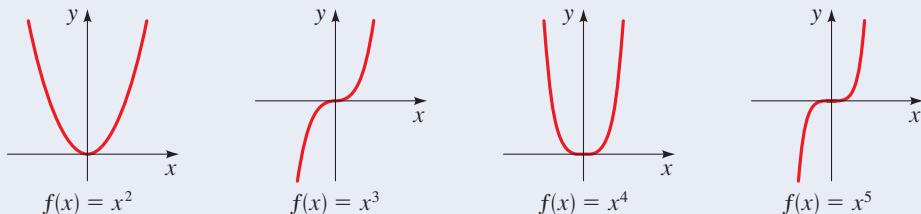
#### Funciones lineales

$$f(x) = mx + b$$



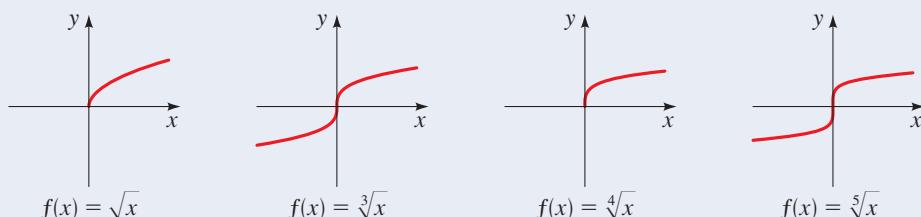
#### Funciones potencia

$$f(x) = x^n$$



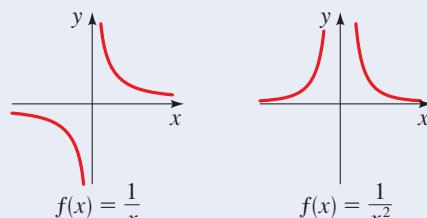
#### Funciones raíz

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$



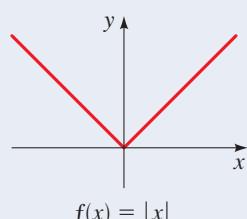
#### Funciones recíprocas

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$



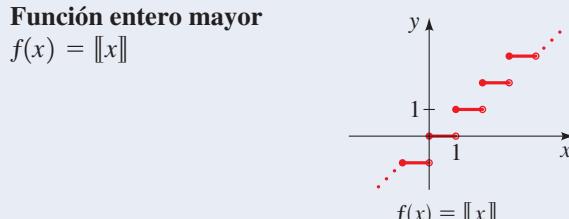
#### Función valor absoluto

$$f(x) = |x|$$



#### Función entero mayor

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket$$



## 2.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- Para graficar la función  $f$ , localizamos los puntos  $(x, \underline{\hspace{1cm}})$  en un plano de coordenadas. Para graficar  $f(x) = x^3 + 2$ , localizamos los puntos  $(x, \underline{\hspace{1cm}})$ . Por lo tanto, el punto  $(2, \underline{\hspace{1cm}})$  está sobre la gráfica de  $f$ .

La altura de la gráfica de  $f$  arriba del eje  $x$  cuando  $x = 2$  es

\_\_\_\_\_.

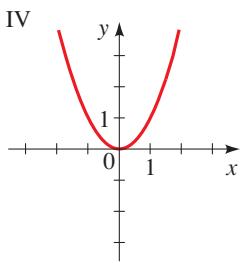
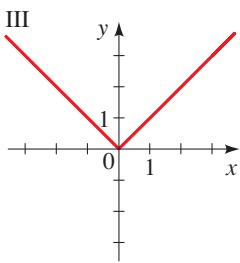
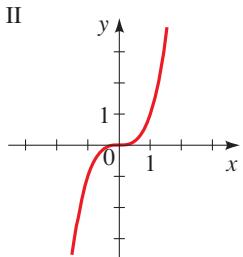
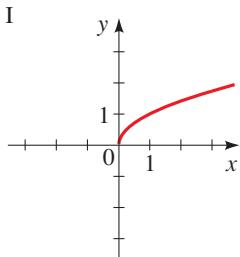
- Si  $f(2) = 3$ , entonces el punto  $(2, \underline{\hspace{1cm}})$  está sobre la gráfica de  $f$ .

3. Si el punto  $(2, 3)$  está sobre la gráfica de  $f$ , entonces  $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. Relacione la función con su gráfica.

(a)  $f(x) = x^2$   
(c)  $f(x) = \sqrt{x}$

(b)  $f(x) = x^3$   
(d)  $f(x) = |x|$



30.  $g(x) = x^2 - x - 20$

- (a)  $[-2, 2]$  por  $[-5, 5]$   
(b)  $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$   
(c)  $[-7, 7]$  por  $[-25, 20]$   
(d)  $[-10, 10]$  por  $[-100, 100]$

31.  $h(x) = x^3 - 5x - 4$

- (a)  $[-2, 2]$  por  $[-2, 2]$   
(b)  $[-3, 3]$  por  $[-10, 10]$   
(c)  $[-3, 3]$  por  $[-10, 5]$   
(d)  $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$

32.  $k(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 2$

- (a)  $[-1, 1]$  por  $[-1, 1]$   
(b)  $[-2, 2]$  por  $[-2, 2]$   
(c)  $[-5, 5]$  por  $[-5, 5]$   
(d)  $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$

33-46 ■ Trace la gráfica de la función definida por tramos.

33.  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

34.  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

35.  $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

36.  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

37.  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

38.  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

39.  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40.  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

41.  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

42.  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43.  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

44.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

45.  $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46.  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

## HABILIDADES

5-28 ■ Trace la gráfica de la función haciendo primero una tabla de valores.

5.  $f(x) = 2$

6.  $f(x) = -3$

7.  $f(x) = 2x - 4$

8.  $f(x) = 6 - 3x$

9.  $f(x) = -x + 3, \quad -3 \leq x \leq 3$

10.  $f(x) = \frac{x - 3}{2}, \quad 0 \leq x \leq 5$

11.  $f(x) = -x^2$

13.  $h(x) = 16 - x^2$

15.  $g(x) = x^3 - 8$

17.  $g(x) = x^2 - 2x$

19.  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

21.  $g(x) = -\sqrt{x}$

23.  $H(x) = |2x|$

25.  $G(x) = |x| + x$

27.  $f(x) = |2x - 2|$

29-32 ■ Grafique la función en cada uno de los rectángulos de vista dados, y seleccione el que produzca la gráfica más apropiada de la función.

29.  $f(x) = 8x - x^2$

- (a)  $[-5, 5]$  por  $[-5, 5]$   
(b)  $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$   
(c)  $[-2, 10]$  por  $[-5, 20]$   
(d)  $[-10, 10]$  por  $[-100, 100]$



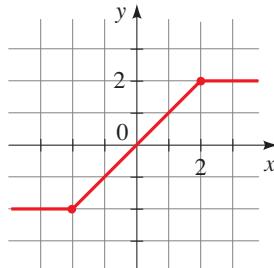
- 47-48** Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función definida por tramos. (Vea la nota al margen, pág. 155.)

47.  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

48.  $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

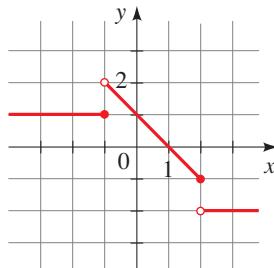
- 49-50** Nos dan la gráfica de una función definida por tramos. Encuentre una fórmula para la función en la forma indicada.

49.



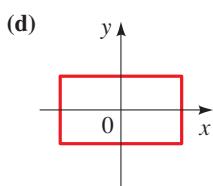
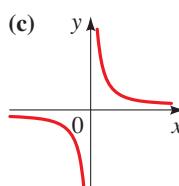
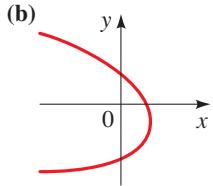
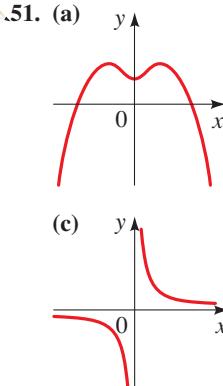
$$f(x) = \begin{cases} \text{[shaded]} & \text{si } x < -2 \\ \text{[shaded]} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \text{[shaded]} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

50.

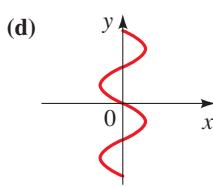
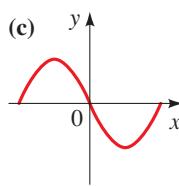
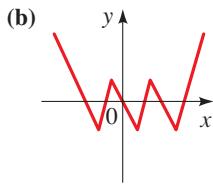
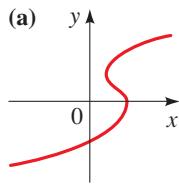


$$f(x) = \begin{cases} \text{[shaded]} & \text{si } x \leq -1 \\ \text{[shaded]} & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \text{[shaded]} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 51-52** Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de  $x$ .

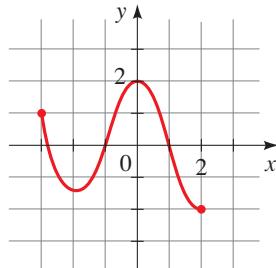


52. (a)

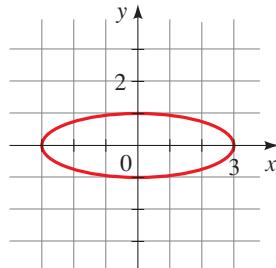


- 53-56** Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de  $x$ . Si lo es, exprese el dominio y el rango de la función.

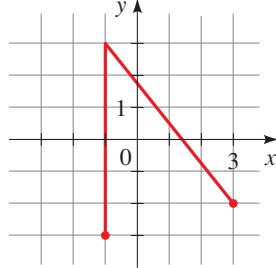
53.



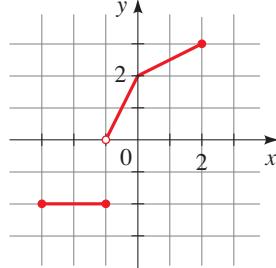
54.



55.



56.



- 57-68** Determine si la ecuación define  $y$  como función de  $x$ . (Vea Ejemplo 9.)

57.  $x^2 + 2y = 4$

58.  $3x + 7y = 21$

59.  $x = y^2$

60.  $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

61.  $x + y^2 = 9$

62.  $x^2 + y = 9$

63.  $x^2y + y = 1$

64.  $\sqrt{x} + y = 12$

65.  $2|x| + y = 0$

66.  $2x + |y| = 0$

67.  $x = y^3$

68.  $x = y^4$

- 69-74** Nos dan una familia de funciones. En las partes (a) y (b) grafique en el rectángulo de vista indicado todos los miembros de la familia dados. En la parte (c) exprese las conclusiones que pueda hacer a partir de sus gráficas.

69.  $f(x) = x^2 + c$

(a)  $c = 0, 2, 4, 6$ ;  $[-5, 5]$  por  $[-10, 10]$

(b)  $c = 0, -2, -4, -6$ ;  $[-5, 5]$  por  $[-10, 10]$

(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de  $c$ ?

70.  $f(x) = (x - c)^2$

(a)  $c = 0, 1, 2, 3$ ;  $[-5, 5]$  por  $[-10, 10]$

(b)  $c = 0, -1, -2, -3$ ;  $[-5, 5]$  por  $[-10, 10]$

(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de  $c$ ?

71.  $f(x) = (x - c)^3$

(a)  $c = 0, 2, 4, 6$ ;  $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$

(b)  $c = 0, -2, -4, -6$ ;  $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$

(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de  $c$ ?

72.  $f(x) = cx^2$

(a)  $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4$ ;  $[-5, 5]$  por  $[-10, 10]$

(b)  $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2$ ;  $[-5, 5]$  por  $[-10, 10]$

(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de  $c$ ?

73.  $f(x) = x^c$

(a)  $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ ;  $[-1, 4]$  por  $[-1, 3]$

(b)  $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ ;  $[-3, 3]$  por  $[-2, 2]$

(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de  $c$ ?

74.  $f(x) = \frac{1}{x^n}$

- (a)  $n = 1, 3$ ;  $[-3, 3]$  por  $[-3, 3]$   
 (b)  $n = 2, 4$ ;  $[-3, 3]$  por  $[-3, 3]$   
 (c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de  $n$ ?

75-78 ■ Encuentre una función cuya gráfica es la curva dada.

75. El segmento de recta que une los puntos  $(-2, 1)$  y  $(4, -6)$   
 76. El segmento de recta que une los puntos  $(-3, -2)$  y  $(6, 3)$   
 77. La mitad superior de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$   
 78. La mitad inferior de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$

## APLICACIONES



79. **Globo de meteorología** Cuando se infla un globo de meteorología, el grueso  $T$  de la capa de caucho está relacionada con el globo mediante la ecuación

$$T(r) = \frac{0.5}{r^2}$$

donde  $T$  y  $r$  se miden en centímetros. Grafique la función  $T$  para valores de  $r$  entre 10 y 100.



80. **Potencia generada por una turbina de viento** La potencia producida por una turbina de viento depende de la velocidad del viento. Si un molino de viento tiene aspas de 3 metros de largo, entonces la potencia  $P$  producida por la turbina está modelada por

$$P(v) = 14.1v^3$$

donde  $P$  se mide en watts (W) y  $v$  se mide en metros por segundo (m/s). Grafique la función  $P$  para velocidades de viento entre 1 m/s y 10 m/s.



81. **Tarifas de una empresa generadora de energía eléctrica** Westside Energy cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa base de \$6.00 por mes, más \$0.10 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh consumidos y \$0.06 por kWh por todo lo consumido de más de 300 kWh. Suponga que un cliente usa  $x$  kWh de electricidad en un mes.

- (a) Exprese el costo mensual  $E$  como una función de  $x$  definida por tramos.  
 (b) Grafique la función  $E$  para  $0 \leq x \leq 600$ .

82. **Función de un taxi** Una compañía de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o parte de milla) y 20 centavos por cada décimo sucesivo de milla (o parte). Exprese el costo  $C$  (en dólares) de un viaje como función definida por partes de la distancia  $x$  recorrida (en millas) para  $0 < x < 2$ , y trace la gráfica de esta función.

83. **Tarifas postales** La tarifa nacional de portes por cartas de primera clase, de 3.5 onzas o menos, es de 44 centavos por la primera onza (o menos), más 17 centavos por cada onza adicional (o parte de una onza). Exprese el porte  $P$  como una función definida por partes del peso  $x$  de una carta, con  $0 < x \leq 3.5$ , y trace la gráfica de esta función.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

### 84. ¿Cuándo una gráfica representa a una función?

Para todo entero  $n$ , la gráfica de la ecuación  $y = x^n$  es la gráfica de una función, es decir,  $f(x) = x^n$ . Explique por qué la gráfica de  $x = y^2$  no es la gráfica de una función de  $x$ . ¿La gráfica de  $x = y^n$  es una gráfica de la función de  $x$ ? Si es así, ¿de qué función de  $x$  es la gráfica? Determine para qué enteros  $n$  la gráfica de  $x = y^n$  es la gráfica de una función de  $x$ .

85. **Funciones escalón** En el Ejemplo 7 y los Ejercicios 82 y 83 nos dan funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos de recta horizontal. Es frecuente que tales funciones reciban el nombre de *funciones escalón*, porque sus gráficas se ven como escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que se ven en la vida diaria.

86. **Funciones escalón alargadas** Trace gráficas de las funciones  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ,  $g(x) = \lfloor 2x \rfloor$  y  $h(x) = \lfloor 3x \rfloor$  en gráficas separadas. ¿Cómo están relacionadas? Si  $n$  es un entero positivo, ¿qué aspecto tiene la gráfica de  $k(x) = \lfloor nx \rfloor$ ?

### 87. Gráfica del valor absoluto de una función



- (a) Trace las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

y

$$g(x) = |x^2 + x - 6|$$

¿Cómo están relacionadas las gráficas de  $f$  y  $g$ ?

- (b) Trace las gráficas de las funciones  $f(x) = x^4 - 6x^2$  y  $g(x) = |x^4 - 6x^2|$ . ¿Cómo están relacionadas las gráficas de  $f$  y  $g$ ?

- (c) En general, si  $g(x) = |f(x)|$ , ¿cómo están relacionadas las gráficas de  $f$  y  $g$ ? Trace gráficas para ilustrar su respuesta.



### PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

#### Relaciones y funciones

En este proyecto exploramos el concepto de función al compararlo con el concepto de una relación. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro:

[www.stewartmath.com](http://www.stewartmath.com)

## 2.3 INFORMACIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Valores de una función: dominio y rango ► Funciones crecientes y decrecientes ► Valores máximo y mínimo locales de una función

Numerosas propiedades de una función se obtienen más fácilmente de una gráfica que de la regla que describe la función. Veremos en esta sección cómo una gráfica nos dice si los valores de una función son crecientes o decrecientes, así como también dónde están los valores máximo y mínimo de una función.

### ▼ Valores de una función: dominio y rango

Una gráfica completa de una función contiene toda la información acerca de una función, porque la gráfica nos dice cuáles valores de entrada corresponden a cuáles valores de salida. Para analizar la gráfica de una función, debemos recordar que *la altura de la gráfica es el valor de la función*. Entonces, podemos leer los valores de una función a partir de su gráfica.

#### EJEMPLO 1 | Hallar los valores de una función a partir de una gráfica

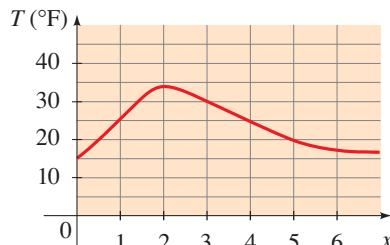


FIGURA 1 Función temperatura

La función  $T$  graficada en la Figura 1 da la temperatura entre el mediodía y las 6:00 p.m. en cierta estación meteorológica.

- Encuentre  $T(1)$ ,  $T(3)$  y  $T(5)$ .
- ¿Cuál es mayor,  $T(2)$  o  $T(4)$ ?
- Encuentre el (los) valor(es) de  $x$  para los que  $T(x) = 25$ .
- Encuentre el (los) valor(es) de  $x$  para los que  $T(x) \geq 25$ .

#### SOLUCIÓN

- $T(1)$  es la temperatura a la 1:00 p.m. Está representada por la altura de la gráfica arriba del eje  $x$  en  $x = 1$ . Entonces,  $T(1) = 25$ . Análogamente,  $T(3) = 30$  y  $T(5) = 20$ .
- Como la gráfica es más alta en  $x = 2$  que en  $x = 4$ , se deduce que  $T(2)$  es mayor que  $T(4)$ .
- La altura de la gráfica es 25 cuando  $x$  es 1 y cuando  $x$  es 4. En otras palabras, la temperatura es 25 a la 1:00 p.m. y a las 4:00 p.m.
- La gráfica es más alta de 25 para  $x$  entre 1 y 4. En otras palabras, la temperatura era 25 o mayor entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m.

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

La gráfica de una función nos ayuda a representar el dominio y rango de la función en el eje  $x$  y eje  $y$ , como se ve en la figura 2.

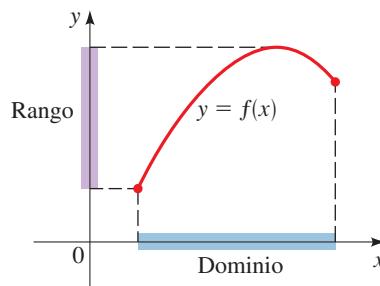


FIGURA 2 Dominio y rango de  $f$

**EJEMPLO 2** | Hallar el dominio y rango a partir de una gráfica

- (a) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ .  
 (b) Encuentre el dominio y rango de  $f$ .

**SOLUCIÓN**

- (a) La gráfica se muestra en la Figura 3.

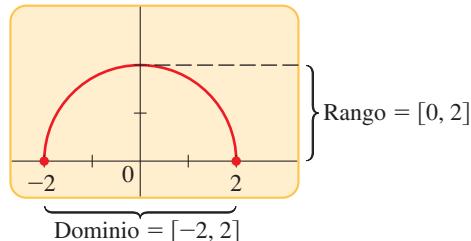


FIGURA 3 Gráfica de  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

- (b) De la gráfica de la Figura 3 vemos que el dominio es  $[-2, 2]$  y el rango es  $[0, 2]$ .

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

### ▼ Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber en dónde sube la gráfica y en dónde baja. La gráfica que se ve en la Figura 4 sube, baja y luego sube de nuevo a medida que avanzamos de izquierda a derecha: sube de  $A$  a  $B$ , baja de  $B$  a  $C$  y sube otra vez de  $C$  a  $D$ . Se dice que la función  $f$  es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando baja.

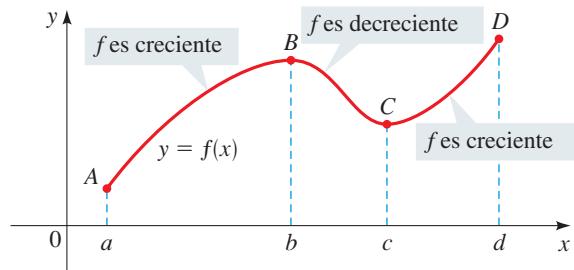


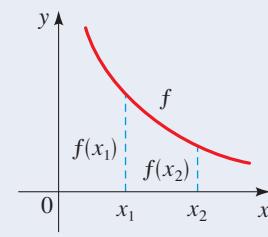
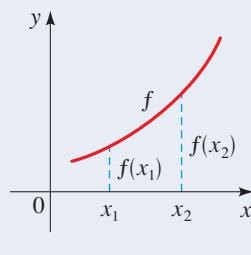
FIGURA 4  $f$  es creciente en  $[a, b]$  y  $[c, d]$ .  $f$  es decreciente en  $[b, c]$ .

Tenemos la siguiente definición.

#### DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

**$f$  es creciente** en un intervalo  $I$  si  $f(x_1) < f(x_2)$  siempre que  $x_1 < x_2$  en  $I$ .

**$f$  es decreciente** en un intervalo  $I$  si  $f(x_1) > f(x_2)$  siempre que  $x_1 < x_2$  en  $I$ .



**EJEMPLO 3** | Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la Figura 5 da el peso  $W$  de una persona a la edad  $x$ . Determine los intervalos en los que la función  $W$  es creciente y en los que es decreciente.

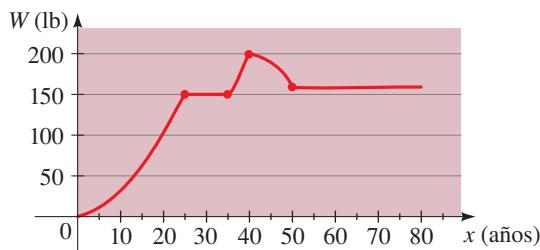


FIGURA 5 El peso como función de la edad

**SOLUCIÓN** La función  $W$  es creciente en  $[0, 25]$  y  $[35, 40]$ . Es decreciente en  $[40, 50]$ . La función  $W$  es constante (ni creciente ni decreciente) en  $[25, 30]$  y  $[50, 80]$ . Esto significa que la persona aumentó de peso hasta la edad de 25, luego aumentó de peso otra vez entre las edades de 35 y 40. Bajó de peso entre las edades de 40 y 50.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

**EJEMPLO 4** | Hallar intervalos donde una función crece y decrece

- Trace la gráfica de la función  $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$ .
- Encuentre el dominio y rango de  $f$ .
- Encuentre los intervalos en los que  $f$  crece y decrece.

**SOLUCIÓN**

- Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la Figura 6.
- El dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}$  porque  $f$  está definida para todos los números reales. Usando la función **TRACE** de la calculadora, encontramos que el valor más alto de  $f(2) = 32$ . Por lo tanto, el rango de  $f$  es  $(-\infty, 32]$ .
- De la gráfica vemos que  $f$  es creciente en los intervalos  $(-\infty, -1]$  y  $[0, 2]$  y es creciente en  $[-1, 0]$  y  $[2, \infty)$ .

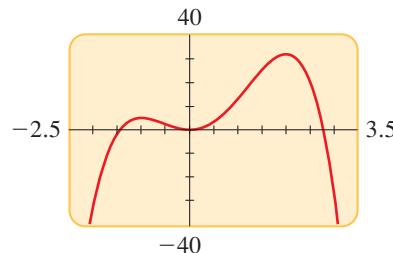


FIGURA 6 Gráfica de  $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$

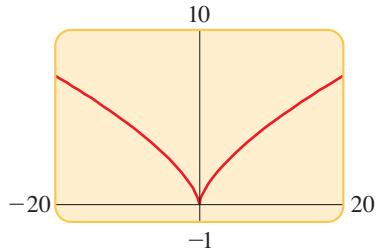
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

**EJEMPLO 5** | Hallar intervalos donde una función crece y decrece

- Trace la gráfica de la función  $f(x) = x^{2/3}$ .
- Encuentre el dominio y rango de la función.
- Encuentre los intervalos en los que  $f$  crece y decrece.

**SOLUCIÓN**

- Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica en la Figura 7.
- De la gráfica observamos que el dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}$  y el rango es  $[0, \infty)$ .
- De la gráfica vemos que  $f$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y creciente en  $[0, \infty)$ .


**FIGURA 7** Gráfica de  $f(x) = x^{2/3}$ 

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

**▼ Valores máximo y mínimo locales de una función**

Hallar los valores máximo y mínimo de una función es importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, si una función representa ingreso o utilidad, entonces estamos interesados en su valor máximo. Para una función que representa costo, desecharíamos hallar su valor mínimo. (Vea *Enfoque sobre el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 213-222 para muchos otros ejemplos.) Fácilmente podemos hallar estos valores a partir de la gráfica de una función. Primero definimos qué queremos decir con un máximo o mínimo locales.

**MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN**

- El valor de una función  $f(a)$  es un **valor máximo local** de  $f$  si

$$f(a) \geq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que  $f(a) \geq f(x)$  para toda  $x$  en algún intervalo abierto que contenga a  $a$ .)

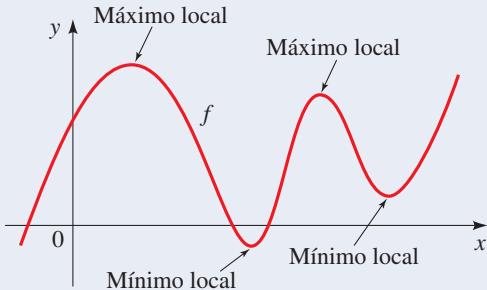
En este caso decimos que  $f$  tiene un **máximo local** en  $x = a$ .

- El valor de la función  $f(a)$  es un **mínimo local** de  $f$  si

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que  $f(a) \leq f(x)$  para toda  $x$  en algún intervalo abierto que contenga a  $a$ .)

En este caso decimos que  $f$  tiene un **mínimo local** en  $x = a$ .



Podemos hallar los valores máximo y mínimo locales de una función usando una calculadora graficadora.

Si hay un rectángulo de vista tal que el punto  $(a, f(a))$  es el punto más alto en la gráfica de  $f$  dentro del rectángulo de vista (no en el borde), entonces el número  $f(a)$  es un valor máximo local de  $f$  (vea Figura 8). Observe que  $f(a) \geq f(x)$  para todos los números  $x$  que sean cercanos a  $a$ .

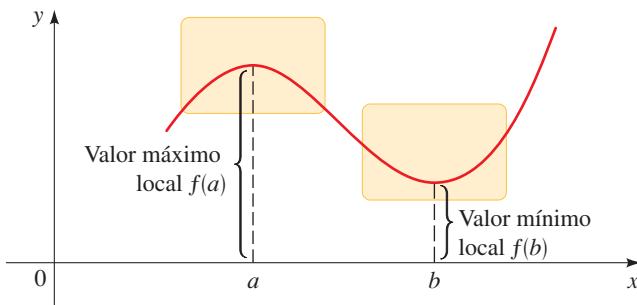


FIGURA 8

Análogamente, si hay un rectángulo de vista tal que el punto  $(b, f(b))$  es el punto más bajo en la gráfica de  $f$  dentro del rectángulo de vista, entonces el número  $f(b)$  es un valor mínimo local de  $f$ . En este caso,  $f(b) \leq f(x)$  para todos los números  $x$  que sean cercanos a  $b$ .

### EJEMPLO 6 | Hallar máximos y mínimos locales para una gráfica

Encuentre los valores máximo y mínimo local de la función  $f(x) = x^3 - 8x + 1$ , correctos a tres lugares decimales.

**SOLUCIÓN** La gráfica de  $f$  se muestra en la Figura 9. Parece haber un máximo local entre  $x = -2$  y  $x = -1$ , y un mínimo local entre  $x = 1$  y  $x = 2$ .

Primero busquemos las coordenadas del punto máximo local. Hacemos acercamiento (zoom) para ampliar el área cerca de este punto, como se ve en la Figura 10. Con el uso de la función **TRACE** de la calculadora graficadora, movemos el cursor a lo largo de la curva y observamos cómo cambian las coordenadas  $y$ . El valor máximo local de  $y$  es 9.709 y este valor ocurre cuando  $x$  es  $-1.633$  correcto a tres lugares decimales.

Localizamos el valor mínimo en una forma similar. Al hacer acercamiento en el rectángulo de vista como se ve en la Figura 11, encontramos que el valor mínimo local es aproximadamente  $-7.709$ , y este valor se presenta cuando  $x \approx 1.633$ .

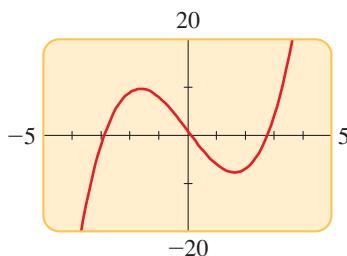


FIGURA 9 Gráfica de  $f(x) = x^3 - 8x + 1$

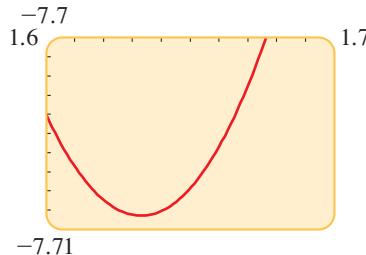


FIGURA 10

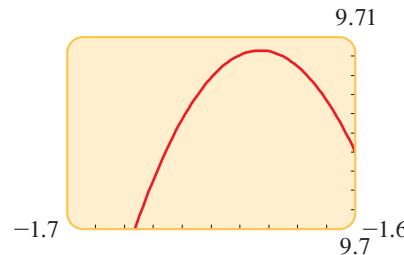


FIGURA 11

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

Los comandos **maximum** y **minimum** en una calculadora TI-83 o TI-84 son otro método para hallar valores extremos de funciones. Usamos este método en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 7** | Un modelo para el índice de precios de alimentos

Un modelo para el índice de precios de alimentos (el precio de una “canasta” representativa de alimentos) entre 1990 y 2000 está dado por la función

$$I(t) = -0.0113t^3 + 0.0681t^2 + 0.198t + 99.1$$

donde  $t$  se mide en años desde la mitad del año 1990, de modo que  $0 \leq t \leq 10$ , e  $I(t)$  está a escala para que  $I(3) = 100$ . Estime el tiempo cuando el alimento fue más costoso durante el período 1990-2000.

**SOLUCIÓN** La gráfica de  $I$  como función de  $t$  se muestra en la Figura 12(a). Parece haber un máximo entre  $t = 4$  y  $t = 7$ . Usando el comando `maximum`, como se ve en la Figura 12(b), observamos que el valor máximo de  $I$  es alrededor de 100.38 y se presenta cuando  $t \approx 5.15$ , que corresponde a agosto de 1995.

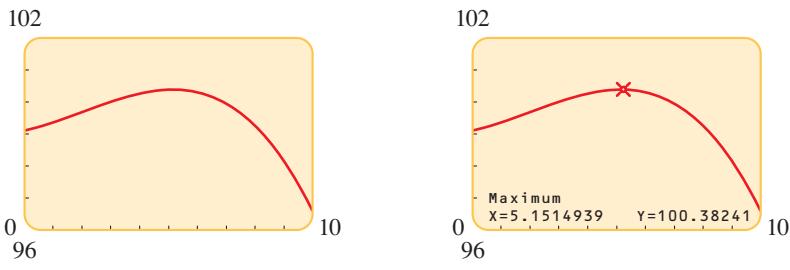


FIGURA 12

(a)

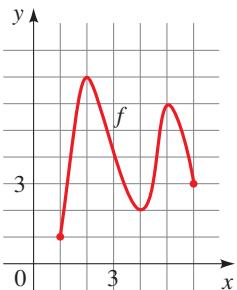
(b)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

## 2.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-4** ■ Estos ejercicios se refieren a la gráfica de la función  $f$  que se muestra a continuación.



- Para hallar el valor de una función  $f(x)$  a partir de la gráfica de  $f$ , encontramos la altura de la gráfica arriba del eje  $x$  en  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ . De la gráfica de  $f$  vemos que  $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- El dominio de la función  $f$  es todos los valores de  $\underline{\hspace{2cm}}$  de los puntos sobre la gráfica, y el rango es todos los valores  $\underline{\hspace{2cm}}$  correspondientes. De la gráfica de  $f$  vemos que el dominio de  $f$  es el intervalo  $\underline{\hspace{2cm}}$  y el rango de  $f$  es el intervalo  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- (a) Si  $f$  es creciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos en la gráfica  $\underline{\hspace{2cm}}$  cuando aumentan los valores  $x$ . De la gráfica de  $f$  vemos que  $f$  es creciente en los intervalos  $\underline{\hspace{2cm}} y  $\underline{\hspace{2cm}}$ .$

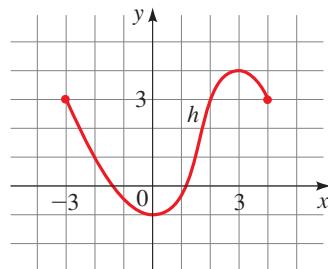
- (b) Si  $f$  es decreciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos sobre la gráfica  $\underline{\hspace{2cm}}$  cuando aumentan los valores  $x$ . De la gráfica de  $f$  vemos que  $f$  es decreciente en los intervalos  $\underline{\hspace{2cm}} y  $\underline{\hspace{2cm}}$ .$

- (a) El valor de una función  $f(a)$  es un valor máximo local de  $f$  si  $f(a)$  es el  $\underline{\hspace{2cm}}$  valor de  $f$  en algún intervalo que contenga a  $a$ . De la gráfica de  $f$  vemos que un valor máximo local de  $f$  es  $\underline{\hspace{2cm}}$  y que este valor se presenta cuando  $x$  es  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

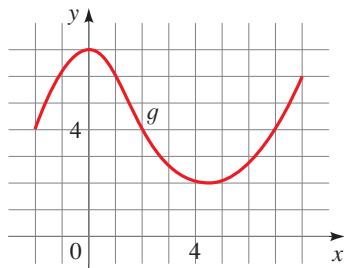
- (b) El valor de una función  $f(a)$  es un valor mínimo local de  $f$  si  $f(a)$  es el  $\underline{\hspace{2cm}}$  valor de  $f$  en algún intervalo que contenga a  $a$ . De la gráfica de  $f$  vemos que un valor mínimo local de  $f$  es  $\underline{\hspace{2cm}}$  y que este valor se presenta cuando  $x$  es  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**HABILIDADES**

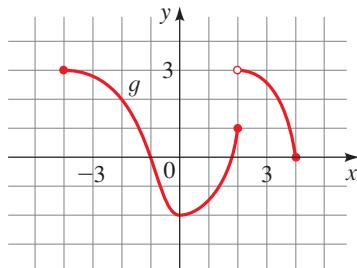
5. Se da la gráfica de una función  $h$ .
- Encuentre  $h(-2)$ ,  $h(0)$ ,  $h(2)$  y  $h(3)$ .
  - Encuentre el dominio y rango de  $h$ .
  - Encuentre los valores de  $x$  para los cuales  $h(x) = 3$ .
  - Encuentre los valores de  $x$  para los cuales  $h(x) \leq 3$ .



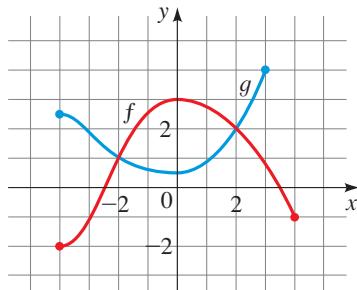
6. Se da la gráfica de una función  $h$ .
- Encuentre  $g(-2)$ ,  $g(0)$  y  $g(7)$ .
  - Encuentre el dominio y rango de  $g$ .
  - Encuentre los valores de  $x$  para los cuales  $g(x) = 4$ .
  - Encuentre los valores de  $x$  para los cuales  $g(x) > 4$ .



7. Se da la gráfica de una función  $g$ .
- Encuentre  $g(-4)$ ,  $g(-2)$ ,  $g(0)$ ,  $g(2)$  y  $g(4)$ .
  - Encuentre el dominio y rango de  $g$ .



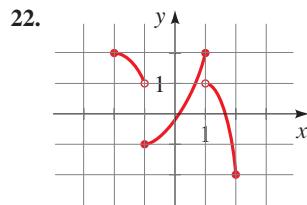
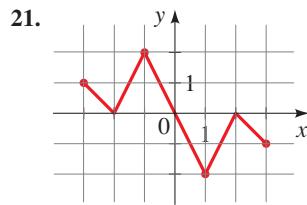
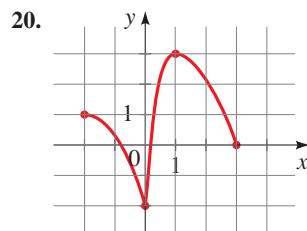
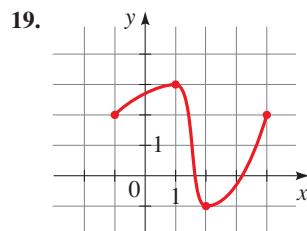
8. Se dan las gráficas de las funciones  $f$  y  $g$ .
- ¿Cuál es mayor,  $f(0)$  o  $g(0)$ ?
  - ¿Cuál es mayor,  $f(-3)$  o  $g(-3)$ ?
  - ¿Para cuáles valores de  $x$  es  $f(x) = g(x)$ ?



- 9-18 ■ Se da una función  $f$ . (a) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de  $f$ . (b) Encuentre el dominio y rango de  $f$  a partir de la gráfica.

- $f(x) = x - 1$
- $f(x) = 2(x + 1)$
- $f(x) = 4, \quad 1 \leq x \leq 3$
- $f(x) = x^2, \quad -2 \leq x \leq 5$
- $f(x) = 4 - x^2$
- $f(x) = x^2 + 4$
- $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
- $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x - 1}$
- $f(x) = \sqrt{x + 2}$

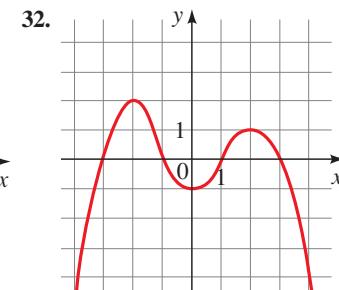
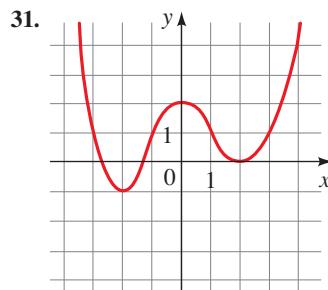
- 19-22 ■ Se da la gráfica de una función. Determine los intervalos en los que la función es (a) creciente y (b) decreciente.

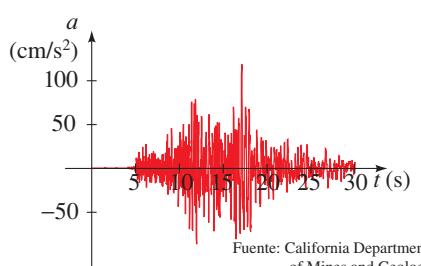
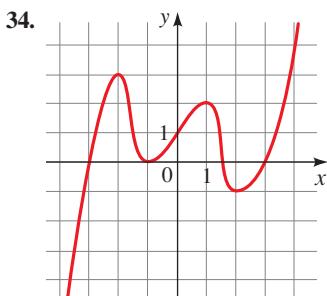
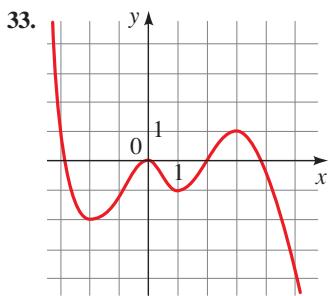


- 23-30 ■ Se da una función  $f$ . (a) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de  $f$ . (b) Exprese aproximadamente los intervalos en los que  $f$  es creciente y en los que  $f$  es decreciente.

- $f(x) = x^2 - 5x$
- $f(x) = x^3 - 4x$
- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$
- $f(x) = x^4 - 16x^2$
- $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$
- $f(x) = x^{2/5}$
- $f(x) = 4 - x^{2/3}$

- 31-34 ■ Se da la gráfica de una función. (a) Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de  $x$  en el que ocurre cada uno. (b) Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente.





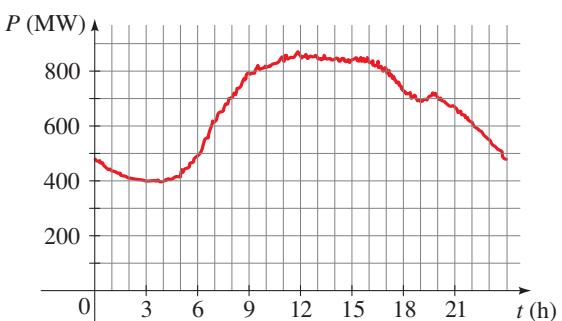
Fuente: California Department of Mines and Geology

- 35-42 ■ Se da una función. (a) Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de  $x$  en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales. (b) Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

35.  $f(x) = x^3 - x$       36.  $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$   
 37.  $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$       38.  $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$   
 39.  $U(x) = x\sqrt{6 - x}$       40.  $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$   
 41.  $V(x) = \frac{1 - x^2}{x^3}$       42.  $V(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

## APLICACIONES

43. **Consumo de energía eléctrica** La figura muestra el consumo de energía eléctrica en San Francisco para el 19 de septiembre de 1996 ( $P$  se mide en megawatts;  $t$  se mide en horas empezando a la medianoche).  
 (a) ¿Cuál fue el consumo de energía eléctrica a las 6:00 a.m.?  
 ¿A las 6:00 p.m.?  
 (b) ¿Cuándo fue mínimo el consumo de energía eléctrica?  
 (c) ¿Cuándo fue máximo el consumo de energía eléctrica?

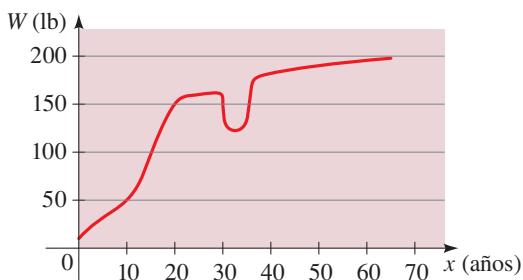


Fuente: Pacific Gas & Electric

44. **Terremoto** La gráfica muestra la aceleración vertical del suelo por el terremoto Northridge de 1994 en Los Ángeles, medido por un sismógrafo. (Aquí  $t$  representa el tiempo en segundos.)  
 (a) ¿En qué tiempo  $t$  el terremoto hizo los primeros movimientos observables de la tierra?  
 (b) ¿En qué tiempo  $t$  pareció terminar el terremoto?  
 (c) ¿En qué tiempo  $t$  alcanzó su intensidad máxima el terremoto?

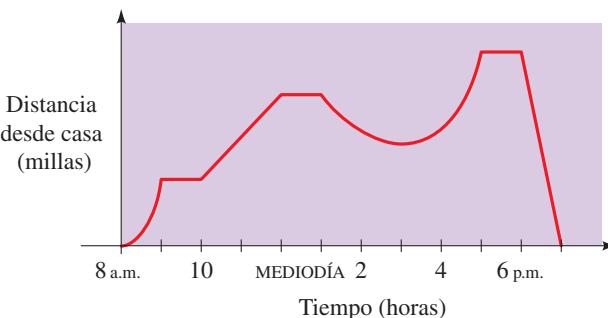
45. **Función de peso** La gráfica da el peso  $W$  de una persona a la edad  $x$ .

- (a) Determine los intervalos en los que la función  $W$  es creciente y aquellos en los que es decreciente.  
 (b) ¿Qué piensa usted que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años de edad?



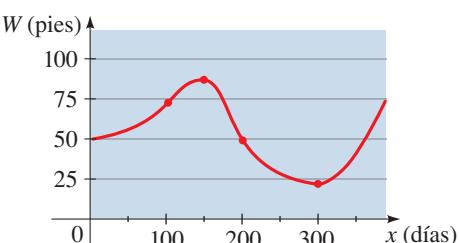
46. **Función de distancia** La gráfica da la distancia de un representante de ventas desde su casa como función del tiempo en cierto día.

- (a) Determine los intervalos (tiempo) en los que su distancia desde casa fue creciente y aquellos en los que fue decreciente.  
 (b) Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de sus viajes en este día.

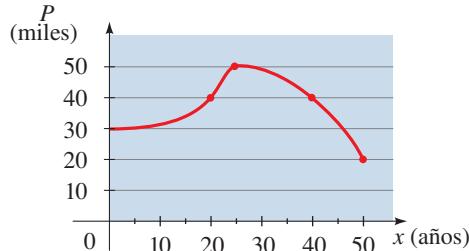


47. **Niveles cambiantes de agua** La gráfica muestra la profundidad del agua  $W$  en un depósito en un período de un año, como función del número de días  $x$  desde el principio del año.

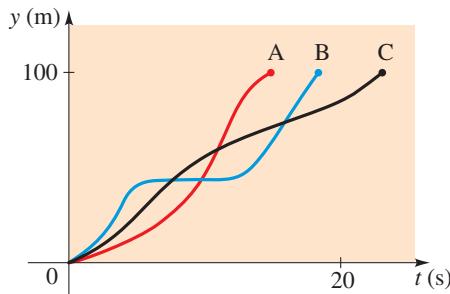
- (a) Determine los intervalos en los que la función  $W$  es creciente y en los que es decreciente.  
 (b) ¿En qué valor de  $x$  alcanza  $W$  un máximo local? ¿Un mínimo local?



- 48. Aumento y disminución de población** La gráfica siguiente muestra la población  $P$  en una pequeña ciudad industrial de 1950 a 2000. La variable  $x$  representa los años desde 1950.
- Determine los intervalos en los que la función  $P$  es creciente y aquellos en los que es decreciente.
  - ¿Cuál fue la población máxima, y en qué año se alcanzó?



- 49. Carrera de obstáculos** Tres atletas compiten en una carrera de 100 metros con vallas. La gráfica describe la distancia corriendo como función del tiempo para cada uno de los atletas. Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de la carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada uno de los atletas terminó la carrera? ¿Qué piensa usted que le ocurrió al corredor B?



- 50. Gravedad cerca de la Luna** Podemos usar la Ley de Newton de Gravitación para medir la atracción gravitacional entre la Luna y un estudiante de álgebra en una nave espacial situada a una distancia  $x$  sobre la superficie de la Luna:

$$F(x) = \frac{350}{x^2}$$

Aquí  $F$  se mide en newtons (N), y  $x$  se mide en millones de metros.

- Grafique la función  $F$  para valores de  $x$  entre 0 y 10.
- Use la gráfica para describir el comportamiento de la atracción gravitacional  $F$  cuando aumenta la distancia  $x$ .



- 51. Radios de estrellas** Los astrónomos infieren los radios de estrellas con el uso de la Ley de Stefan Boltzmann:

$$E(T) = (5.67 \times 10^{-8})T^4$$

donde  $E$  es la energía radiada por unidad de área superficial

medida en watts (W) y  $T$  es la temperatura absoluta medida en kelvin (K).

- Grafique la función  $E$  para temperaturas  $T$  entre 100 K y 300 K.
- Use la gráfica para describir el cambio en energía  $E$  cuando la temperatura  $T$  aumenta.

- 52. Peces migratorios** Un pez nada a una velocidad  $v$  con respecto al agua, contra una corriente de 5 mi/h. Usando un modelo matemático de gasto de energía, puede demostrarse que la energía total  $E$  requerida para nadar una distancia de 10 millas está dada por

$$E(v) = 2.73v^3 \frac{10}{v - 5}$$

Los biólogos piensan que los peces migratorios tratan de reducir al mínimo la energía necesaria para nadar una distancia fija. Encuentre el valor de  $v$  que minimiza la energía necesaria.

NOTA: Este resultado ha sido verificado; los peces migratorios nadan contra una corriente a una velocidad 50% mayor que la velocidad de la corriente.



- 53. Ingeniería de carreteras** Una ingeniera de carreteras desea estimar el número máximo de autos que con seguridad puedan viajar por una carretera en particular a una velocidad determinada. Ella supone que cada auto mide 17 pies de largo, viaja a una rapidez  $s$ , y sigue al auto de adelante a una "distancia segura de seguimiento" para esa rapidez. Ella encuentra que el número  $N$  de autos que pueden pasar por cierto punto por minuto está modelado por la función

$$N(s) = \frac{88s}{17 + 17\left(\frac{s}{20}\right)^2}$$

¿A qué rapidez puede viajar con seguridad en esa carretera el máximo número de autos?

- 54. Volumen de agua** Entre 0°C y 30°C, el volumen  $V$  (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura  $T$  está dado por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el volumen de 1 kg de agua es mínimo.

- 55. Toser** Cuando un cuerpo extraño alojado en la tráquea (garganta) obliga a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba, causando un aumento en presión en los pulmones. Al mismo tiempo, la tráquea se contrae, causando que el aire expulsado se mueva más rápido y aumente la presión sobre el cuerpo extraño. De acuerdo con un modelo matemático de toser, la velocidad  $v$  de la corriente de aire que pasa por la tráquea de una persona de tamaño promedio está relacionada con el radio  $r$  de la tráquea (en centímetros) por la función

$$v(r) = 3.2(1 - r)r^2 \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1$$

Determine el valor de  $r$  para el cual  $v$  es máxima.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

## 56. Funciones que son siempre crecientes o decrecientes

Trace gráficas aproximadas de funciones que están definidas para todos los números reales, y que exhiben el comportamiento indicado (o explique por qué el comportamiento es imposible).

- (a)  $f$  es siempre creciente, y  $f(x) > 0$  para toda  $x$ .
- (b)  $f$  es siempre decreciente, y  $f(x) > 0$  para toda  $x$ .
- (c)  $f$  es siempre creciente, y  $f(x) < 0$  para toda  $x$ .
- (d)  $f$  es siempre decreciente, y  $f(x) < 0$  para toda  $x$ .

## 57. Máximos y mínimos

En el Ejemplo 7 vimos una situación real en la que el valor máximo de una función es importante. Mencione otras varias situaciones diarias en las que es importante un valor máximo o mínimo.

58. Reducir al mínimo una distancia

Cuando buscamos un valor mínimo o máximo de una función, a veces es más fácil trabajar con una función más sencilla.

- (a) Suponga que

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

donde  $f(x) \geq 0$  para toda  $x$ . Explique por qué los mínimos y máximos locales de  $f$  y  $g$  se presentan a los mismos valores de  $x$ .

- (b) Sea  $g(x)$  la distancia entre el punto  $(3, 0)$  y el punto  $(x, x^2)$  en la gráfica de la parábola  $y = x^2$ . Exprese  $g$  como función de  $x$ .

- (c) Encuentre el valor mínimo de la función  $g$  que encontró en la parte (b). Use el principio descrito en la parte (a) para simplificar su trabajo.

## 2.4 RAPIDEZ DE CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

## Rapidez de cambio promedio ► Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante

Las funciones se usan con frecuencia para modelar cantidades que cambian. En esta sección aprendemos a hallar la rapidez a la que cambian los valores de una función cuando cambia la variable de entrada.

## ▼ Rapidez de cambio promedio

Todos estamos familiarizados con el concepto de rapidez: si una persona viaja en auto una distancia de 120 millas en 2 horas, entonces el promedio de rapidez, o rapidez de viaje, es  $\frac{120 \text{ mi}}{2 \text{ h}} = 60 \text{ mi/h}$ . Ahora supongamos que usted hace un viaje en auto y registra la distancia recorrida a cada pocos minutos. La distancia  $s$  que ha recorrido es una función del tiempo  $t$ :

$$s(t) = \text{distancia total recorrida en el tiempo } t$$

Graficamos la función  $s$  como se ve en la Figura 1. La gráfica muestra que la persona ha recorrido un total de 50 millas después de 1 hora, 75 millas después de 2 horas, 140 millas después de 3 horas, y así sucesivamente. Para hallar su *promedio* de rapidez entre cualesquier dos puntos en el viaje, dividimos la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

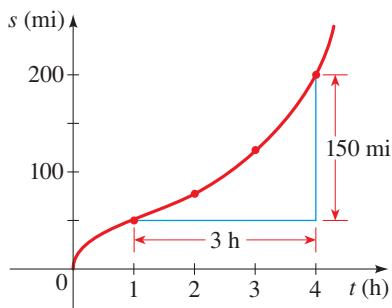


FIGURA 1  
Promedio de rapidez

Calculemos su promedio de rapidez entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m. El tiempo transcurrido es  $4 - 1 = 3$  horas. Para hallar la distancia recorrida, restamos la distancia a la 1:00 p.m. de la distancia a las 4:00 p.m., es decir,  $200 - 50 = 150$  millas. Entonces, el promedio de su rapidez es

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{150 \text{ mi}}{3 \text{ h}} = 50 \text{ mi/h}$$

El promedio de rapidez que acabamos de calcular se puede expresar usando notación de funciones:

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{200 - 50}{3} = 50 \text{ mi/h}$$

Observe que el promedio de rapidez es diferente en diferentes intervalos. Por ejemplo, entre las 2:00 p.m. y las 3:00 p.m. encontramos que

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{140 - 75}{1} = 65 \text{ mi/h}$$

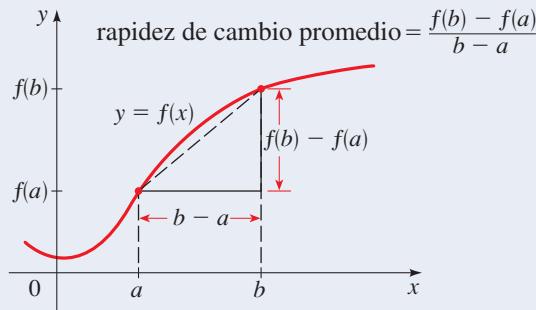
Hallar la rapidez de cambio promedio es importante en innumerables contextos. Por ejemplo, podríamos estar interesados en saber la rapidez con que baja la temperatura del aire cuando una tormenta se aproxima, o la rapidez con la que aumentan los ingresos por la venta de un nuevo producto. Por lo tanto, necesitamos saber cómo determinar la rapidez de cambio promedio de las funciones que modelan estas cantidades. De hecho, el concepto de rapidez de cambio promedio puede definirse para cualquier función.

### RAPIDEZ DE CAMBIO PROMEDIO

La **rapidez de cambio promedio** de la función  $y = f(x)$  entre  $x = a$  y  $x = b$  es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La rapidez de cambio promedio es la pendiente de la **recta secante** entre  $x = a$  y  $x = b$  en la gráfica de  $f$ , esto es, la recta que pasa por  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .



### EJEMPLO 1 | Cálculo de la rapidez de cambio promedio

Para la función  $f(x) = (x - 3)^2$ , cuya gráfica se muestra en la Figura 2, encuentre la rapidez de cambio promedio entre los siguientes puntos:

- (a)  $x = 1$  y  $x = 3$       (b)  $x = 4$  y  $x = 7$

### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} && \text{Definición} \\
 &= \frac{(3 - 3)^2 - (1 - 3)^2}{3 - 1} && \text{Use } f(x) = (x - 3)^2 \\
 &= \frac{0 - 4}{2} = -2
 \end{aligned}$$

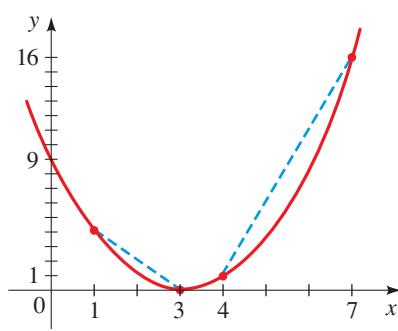


FIGURA 2  $f(x) = (x - 3)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} && \text{Definición} \\
 &= \frac{(7 - 3)^2 - (4 - 3)^2}{7 - 4} && \text{Use } f(x) = (x - 3)^2 \\
 &= \frac{16 - 1}{3} = 5
 \end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11



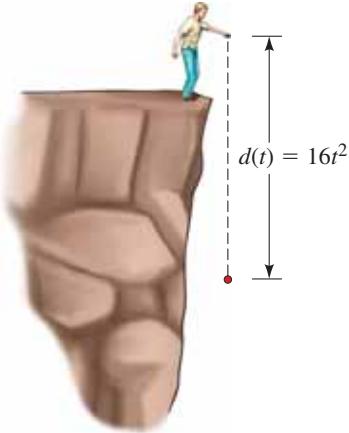
### EJEMPLO 2 | Promedio de rapidez de un cuerpo en caída

Si un cuerpo se deja caer desde un risco o un edificio alto, entonces la distancia que ha caído después de  $t$  segundos está dada por la función  $d(t) = 16t^2$ . Encuentre su promedio de rapidez (rapidez de cambio promedio) en los siguientes intervalos:

(a) Entre 1 s y 5 s

(b) Entre  $t = a$  y  $t = a + h$

#### SOLUCIÓN



$$\begin{aligned}
 \text{(a) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{d(5) - d(1)}{5 - 1} && \text{Definición} \\
 &= \frac{16(5)^2 - 16(1)^2}{5 - 1} && \text{Use } d(t) = 16t^2 \\
 &= \frac{400 - 16}{4} \\
 &= 96 \text{ pies/s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{d(a + h) - d(a)}{(a + h) - a} && \text{Definición} \\
 &= \frac{16(a + h)^2 - 16(a)^2}{(a + h) - a} && \text{Use } d(t) = 16t^2 \\
 &= \frac{16(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} && \text{Desarrolla y factorice 16} \\
 &= \frac{16(2ah + h^2)}{h} && \text{Simplifique el numerador} \\
 &= \frac{16h(2a + h)}{h} && \text{Factorice } h \\
 &= 16(2a + h) && \text{Simplifique}
 \end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15



La rapidez de cambio promedio calculada en el Ejemplo 2(b) se conoce como un *cociente de diferencias*. En cálculo, usamos cocientes de diferencias para calcular la magnitud de rapidez de cambio *instantáneo*. Un ejemplo de una rapidez de cambio instantáneo es la velocidad indicada en el velocímetro de un auto. Éste cambia de un instante al siguiente cuando cambia la velocidad del auto.

Las gráficas de la Figura 3 muestran que si una función es creciente en un intervalo, entonces la rapidez de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es positivo, mientras que si una función es decreciente en un intervalo, entonces la rapidez de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es negativo.

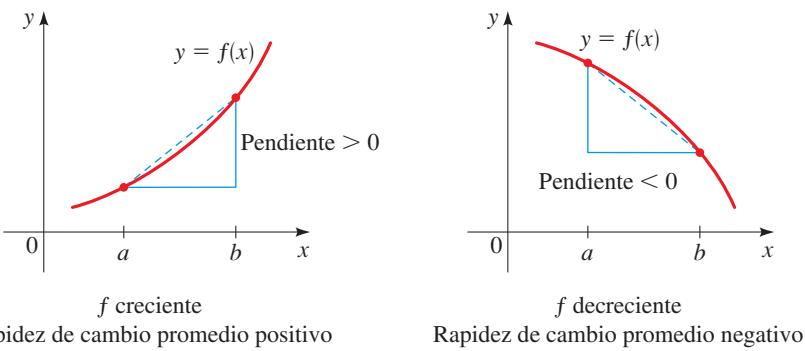


FIGURA 3

**EJEMPLO 3** | Rapidez de cambio promedio de temperatura

La tabla siguiente da las temperaturas exteriores observadas por un estudiante de ciencias en un día de primavera. Trace una gráfica de los datos, y encuentre el promedio de rapidez de cambio de temperatura entre las horas siguientes:

- (a) 8:00 a.m. y 9:00 a.m.
- (b) 1:00 p.m. y 3:00 p.m.
- (c) 4:00 p.m. y 7:00 p.m.

Hora	Temperatura (°F)
8:00 a.m.	38
9:00 a.m.	40
10:00 a.m.	44
11:00 a.m.	50
12:00 MEDIODÍA	56
1:00 p.m.	62
2:00 p.m.	66
3:00 p.m.	67
4:00 p.m.	64
5:00 p.m.	58
6:00 p.m.	55
7:00 p.m.	51

**SOLUCIÓN** En la Figura 4 se muestra una gráfica de los datos. Con  $t$  represente el tiempo, medido en horas desde la medianoche (así, por ejemplo, 2:00 p.m. corresponde a  $t = 14$ ). Defina la función  $F$  por

$$F(t) = \text{temperatura en el tiempo } t$$

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{\text{temperatura a las 9 a.m.} - \text{temperatura a las 8 a.m.}}{9 - 8} \\
 &= \frac{F(9) - F(8)}{9 - 8} = \frac{40 - 38}{9 - 8} = 2
 \end{aligned}$$

La rapidez de cambio promedio fue  $2^{\circ}\text{F}$  por hora.

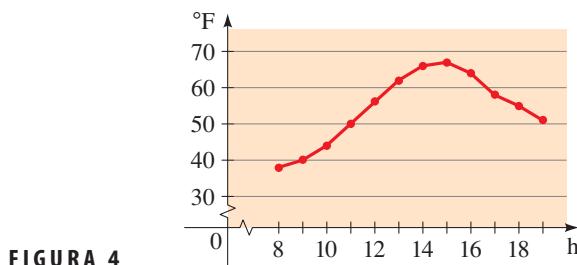


FIGURA 4

$$\begin{aligned}
 \text{(b) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{\text{temperatura a las 3 p.m.} - \text{temperatura a la 1 p.m.}}{15 - 13} \\
 &= \frac{F(15) - F(13)}{15 - 13} = \frac{67 - 62}{2} = 2.5
 \end{aligned}$$

La rapidez de cambio promedio fue  $2.5^{\circ}\text{F}$  por hora.

$$\begin{aligned}
 \text{(c) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{\text{temperatura a las 7 p.m.} - \text{temperatura a las 4 p.m.}}{19 - 16} \\
 &= \frac{F(19) - F(16)}{19 - 16} = \frac{51 - 64}{3} \approx -4.3
 \end{aligned}$$

La rapidez de cambio promedio fue alrededor de  $-4.3^{\circ}\text{F}$  por hora durante este intervalo. El signo negativo indica que la temperatura estaba bajando.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 25

## ▼ Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante

Para una función lineal  $f(x) = mx + b$  la rapidez de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es la misma constante  $m$ . Esto es consistente con lo que aprendimos en la Sección 1.10 de que la pendiente de una recta  $y = mx + b$  es la rapidez de cambio promedio de  $y$  con respecto a  $x$ . Por otra parte, si una función  $f$  tiene rapidez de cambio promedio constante, entonces debe ser una función lineal. Nos piden demostrar este dato en el Ejercicio 33. En el siguiente ejemplo encontramos la rapidez de cambio promedio de para una función lineal en particular.

### EJEMPLO 4 | Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante

Sea  $f(x) = 3x - 5$ . Encuentre la rapidez de cambio promedio de  $f$  entre los siguientes puntos.

- (a)  $x = 0$  y  $x = 1$
- (b)  $x = 3$  y  $x = 7$
- (c)  $x = a$  y  $x = a + h$

¿Qué conclusión puede usted sacar de sus respuestas?

### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(3 \cdot 1 - 5) - (3 \cdot 0 - 5)}{1} \\
 &= \frac{(-2) - (-5)}{1} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{(3 \cdot 7 - 5) - (3 \cdot 3 - 5)}{4} \\
 &= \frac{16 - 4}{4} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c) Rapidez de cambio promedio} &= \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{[3(a + h) - 5] - [3a - 5]}{h} \\
 &= \frac{3a + 3h - 5 - 3a + 5}{h} = \frac{3h}{h} = 3
 \end{aligned}$$

Parece que la rapidez de cambio promedio es siempre 3 para esta función. De hecho, la parte (c) demuestra que la rapidez de cambio entre cualesquier dos puntos arbitrarios  $x = a$  y  $x = a + h$  es 3.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

## 2.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Si usted hace un viaje de 100 millas en 2 horas, entonces su promedio de velocidad del viaje es

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} = \text{_____}$$

2. La rapidez de cambio promedio de una función  $f$  entre  $x = a$  y  $x = b$  es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} = \text{_____}$$

3. La rapidez de cambio promedio de una función  $f(x) = x^2$  entre  $x = 1$  y  $x = b$  es

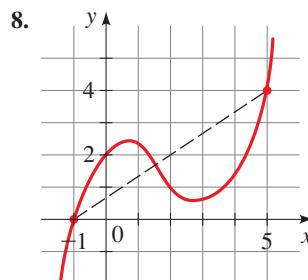
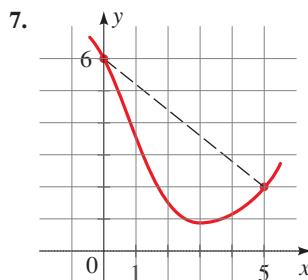
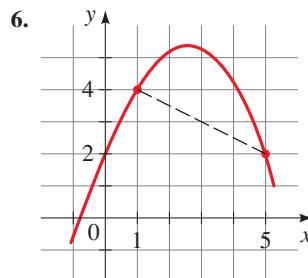
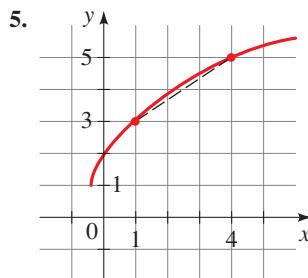
$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} = \text{_____}$$

4. (a) La rapidez de cambio promedio de una función  $f$  entre  $x = a$  y  $x = b$  es la pendiente de la recta \_\_\_\_\_ entre  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .

- (b) La rapidez de cambio promedio de la función lineal  $f(x) = 3x + 5$  entre cualesquier dos puntos es \_\_\_\_\_.

### HABILIDADES

- 5-8 ■ Se da la gráfica de una función. Determine la rapidez de cambio promedio de la función entre los valores de la variable dados.



- 9-20 ■ Se da la gráfica de una función. Determine la rapidez de cambio promedio de la función entre los valores de la variable dados.

9.  $f(x) = 3x - 2$ ;  $x = 2, x = 3$

10.  $g(x) = 5 + \frac{1}{2}x$ ;  $x = 1, x = 5$

11.  $h(t) = t^2 + 2t$ ;  $t = -1, t = 4$

12.  $f(z) = 1 - 3z^2$ ;  $z = -2, z = 0$

13.  $f(x) = x^3 - 4x^2$ ;  $x = 0, x = 10$

14.  $f(x) = x + x^4$ ;  $x = -1, x = 3$

15.  $f(x) = 3x^2$ ;  $x = 2, x = 2 + h$

16.  $f(x) = 4 - x^2$ ;  $x = 1, x = 1 + h$

17.  $g(x) = \frac{1}{x}$ ;  $x = 1, x = a$

18.  $g(x) = \frac{2}{x + 1}$ ;  $x = 0, x = h$

19.  $f(t) = \frac{2}{t}$ ;  $t = a, t = a + h$

20.  $f(t) = \sqrt{t}$ ;  $t = a, t = a + h$

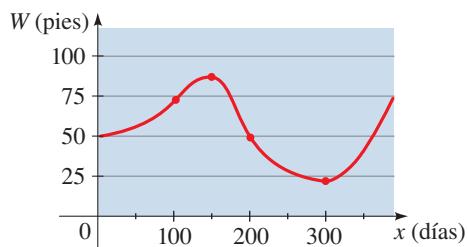
- 21-22 ■ Se da una función lineal. (a) Encuentre la rapidez de cambio promedio de la función entre  $x = a$  y  $x = a + h$ . (b) Demuestre que la rapidez de cambio promedio es igual que la pendiente de la recta.

21.  $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

22.  $g(x) = -4x + 2$

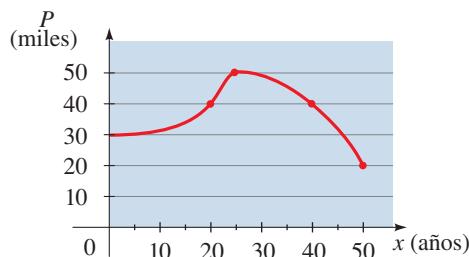
### APLICACIONES

23. **Niveles cambiantes de agua** La gráfica muestra la profundidad del agua  $W$  en un depósito en un período de un año, como función del número de días  $x$  desde el principio del año. ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de  $W$  entre  $x = 100$  y  $x = 200$ ?



24. **Aumento y disminución de población** La gráfica siguiente muestra la población  $P$  en una pequeña ciudad industrial de 1950 a 2000. La variable  $x$  representa los años desde 1950.

- (a) ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de  $P$  entre  $x = 20$  y  $x = 40$ ?  
 (b) Interprete el valor de la rapidez de cambio promedio que encontró en la parte (a).



- 25. Aumento y disminución de población** La tabla siguiente da la población en una pequeña comunidad costera para el período 1997-2006. Las cifras mostradas son para enero 1 de cada año.

- ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de población entre 1998 y 2001?
- ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de población entre 2002 y 2004?
- ¿Para cuál período fue creciente la población?
- ¿Para cuál período fue decreciente la población?

Año	Población
1997	624
1998	856
1999	1336
2000	1578
2001	1591
2002	1483
2003	994
2004	826
2005	801
2006	745

- 26. Rapidez de carrera** Un hombre está corriendo alrededor de una pista circular que mide 200 m de circunferencia. Un observador usa un cronómetro para registrar el tiempo del corredor al final de cada vuelta, obteniendo los datos de la tabla siguiente.

- ¿Cuál fue el promedio de velocidad del hombre (rapidez) entre 68 y 152 s?
- ¿Cuál fue el promedio de velocidad del hombre entre 263 y 412 s?
- Calcule la velocidad del hombre para cada vuelta. ¿Está reduciéndola, aumentándola o ninguna de éstas?

Tiempo (s)	Distancia (m)
32	200
68	400
108	600
152	800
203	1 000
263	1 200
335	1 400
412	1 600

- 27. Ventas de reproductores de CD** La tabla siguiente muestra el número de reproductores de CD vendidos en una pequeña tienda de aparatos electrónicos en los años 1993-2000.

- ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de ventas entre 1993 y 2003?
- ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de ventas entre 1993 y 1994?
- ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de ventas entre 1994 y 1996?

- (d)** ¿Entre cuáles dos años sucesivos las ventas de reproductores de CD *aumentaron* más rápidamente? ¿*Disminuyeron* más rápidamente?

Año	Reproductores de CD vendidos
1993	512
1994	520
1995	413
1996	410
1997	468
1998	510
1999	590
2000	607
2001	732
2002	612
2003	584

- 28. Colección de libros** Entre 1980 y 2000, un coleccionista de libros raros compró libros para su colección a razón de 40 libros por año. Use esta información para completar la tabla siguiente. (Observe que no se dan todos los años en la tabla.)

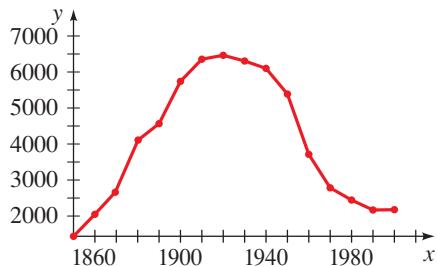
Año	Número de libros
1980	420
1981	460
1982	
1985	
1990	
1992	
1995	
1997	
1998	
1999	
2000	1220

- 29. Sopa que se enfriá** Cuando un tazón de sopa caliente se deja en un cuarto, la sopa finalmente se enfriá a la temperatura del cuarto. La temperatura  $T$  de la sopa es una función del tiempo  $t$ . La tabla siguiente da la temperatura (en °F) de un tazón de sopa  $t$  minutos después que se dejó en la mesa. Encuentre la rapidez de cambio promedio de la temperatura de la sopa en los primeros 20 minutos y en los siguientes 20 minutos. ¿Durante qué intervalo se enfrió la sopa más rápidamente?

$t$ (min)	$T$ (°F)	$t$ (min)	$T$ (°F)
0	200	35	94
5	172	40	89
10	150	50	81
15	133	60	77
20	119	90	72
25	108	120	70
30	100	150	70

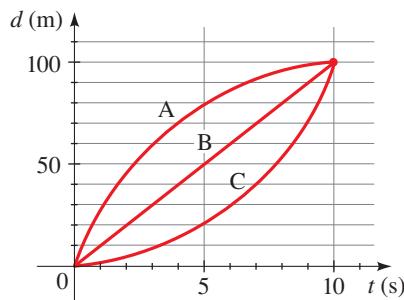
- 30. Granjas en Estados Unidos** La gráfica siguiente da el número de granjas en Estados Unidos de 1850 a 2000.

- (a) Estime la rapidez de cambio promedio en el número de granjas entre (i) 1860 y 1890 y (ii) 1950 y 1970.  
 (b) ¿En cuál década experimentó el número de granjas la máxima rapidez de cambio promedio?



### DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 31. Carrera de 100 metros** Una carrera de 100 metros termina en un empate triple para el primer lugar. La gráfica siguiente muestra la distancia como función del tiempo para cada uno de los tres ganadores.
- (a) Encuentre el promedio de rapidez para cada ganador.  
 (b) Describa la diferencia entre las formas en las que los tres atletas corrieron la carrera.



- 32. Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante**

**constante** Si  $f(x) = mx + b$  es una función lineal, entonces la rapidez de cambio promedio de  $f$  entre cualesquier dos números reales  $x_1$  y  $x_2$  es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Calcule esta rapidez de cambio promedio para demostrar que es igual que la pendiente  $m$ .

- 33. Las funciones con rapidez de cambio constante**

**son lineales** Si la función  $f$  tiene la misma rapidez de cambio promedio  $c$  entre cualesquier dos puntos, entonces para los puntos  $a$  y  $x$  tenemos

$$c = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Reacomode esta expresión para demostrar que

$$f(x) = cx + (f(a) - ca)$$

y concluya que  $f$  es una función lineal.

## 2.5 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Desplazamiento vertical ▶ Desplazamiento horizontal ▶ Gráficas que se reflejan ▶ Alargamiento y contracción verticales ▶ Alargamiento y contracción horizontales ▶ Funciones pares e impares

En esta sección estudiamos la forma en que ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto nos dará una mejor idea de cómo graficar funciones. Las transformaciones que estudiamos son desplazamiento, reflexión y alargamiento.

### ▼ Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza verticalmente su gráfica; hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

En general, suponga que conocemos la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Cómo obtenemos de ella las gráficas de lo siguiente?

$$y = f(x) + c \quad y \quad y = f(x) - c \quad (c > 0)$$

La coordenada  $y$  de cada punto en la gráfica de  $y = f(x) + c$  está  $c$  unidades arriba de la coordenada  $y$  del punto correspondiente en la gráfica de  $y = f(x)$ . Por tanto, obtenemos la gráfica de  $y = f(x) + c$  simplemente desplazando la gráfica de  $y = f(x)$  hacia arriba  $c$  unidades. Del mismo modo, obtenemos la gráfica de  $y = f(x) - c$  desplazando la gráfica de  $y = f(x)$  hacia abajo  $c$  unidades.

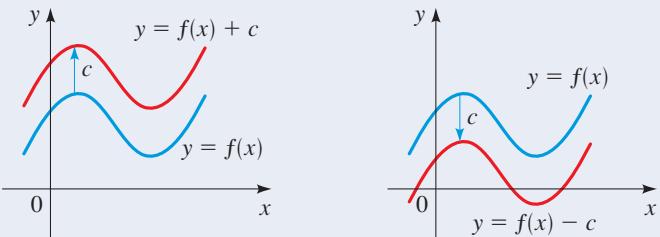
Recuerde que la gráfica de la función es igual que la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ .

## DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE GRÁFICAS

Suponga  $c > 0$ .

Para graficar  $y = f(x) + c$ , desplace la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades hacia arriba.

Para graficar  $y = f(x) - c$ , desplace la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades hacia abajo.



### EJEMPLO 1 | Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de  $f(x) = x^2$  para trazar la gráfica de cada función.

- (a)  $g(x) = x^2 + 3$       (b)  $h(x) = x^2 - 2$

**SOLUCIÓN** La función  $f(x) = x^2$  se graficó en el Ejemplo 1(a), Sección 2.2. Está trazada otra vez en la Figura 1.

- (a) Observe que

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Entonces la coordenada  $y$  de cada punto sobre la gráfica de  $g$  está 3 unidades arriba del punto correspondiente en la gráfica de  $f$ . Esto significa que para graficar  $g$  desplazamos 3 unidades hacia arriba la gráfica de  $f$ , como en la Figura 1.

- (b) Análogamente, para graficar  $h$ , desplazamos 2 unidades hacia abajo la gráfica de  $f$ , como en la Figura 1.

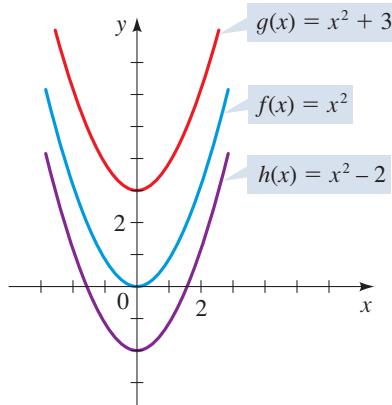


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 21 Y 23

### ▼ Desplazamiento horizontal

Suponga que conocemos la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Cómo la usamos para obtener las gráficas de lo siguiente?

$$y = f(x + c) \quad y \quad y = f(x - c) \quad (c > 0)$$

El valor de  $f(x - c)$  en  $x$  es igual que el valor de  $f(x)$  en  $x - c$ . Como  $x - c$  está  $c$  unidades a la izquierda de  $x$ , se deduce que la gráfica de  $y = f(x - c)$  es justo la gráfica de  $y = f(x)$

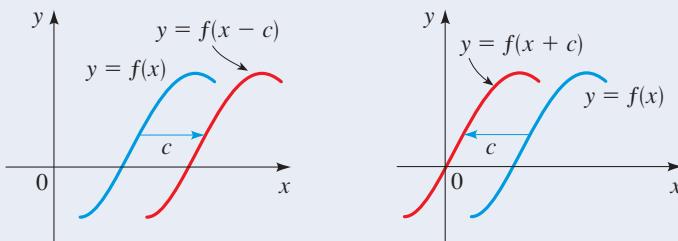
desplazada a la derecha  $c$  unidades. Un razonamiento similar muestra que la gráfica de  $y = f(x + c)$  es la gráfica de  $y = f(x)$  desplazada a la izquierda  $c$  unidades. El siguiente cuadro resume estos datos.

### DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE GRÁFICAS

Suponga  $c > 0$ .

Para graficar  $y = f(x - c)$ , desplace la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades a la derecha.

Para graficar  $y = f(x + c)$ , desplace la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades a la izquierda.



### EJEMPLO 2 | Desplazamientos horizontales de gráficas

Use la gráfica de  $f(x) = x^2$  para trazar la gráfica de cada función.

- (a)  $g(x) = (x + 4)^2$       (b)  $h(x) = (x - 2)^2$

#### SOLUCIÓN

- (a) Para graficar  $g$ , desplazamos 4 unidades a la izquierda la gráfica de  $f$ .  
 (b) Para graficar  $h$ , desplazamos 2 unidades a la derecha la gráfica de  $f$ .

Las gráficas de  $g$  y  $h$  están trazadas en la Figura 2.

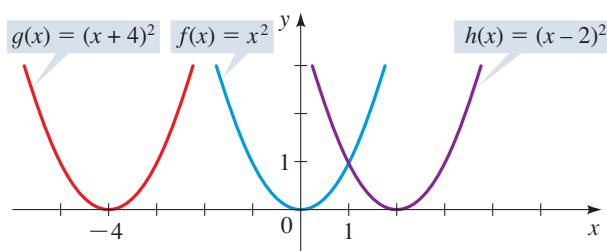


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 25 Y 27



Library of Congress

**RENÉ DESCARTES** (1596-1650) nació en la población de La Haye en el sur de Francia. Desde sus primeros años gustaba de las matemáticas por “la certeza de sus resultados y la claridad de su razonamiento”. Creía que para llegar a la verdad uno debe empezar por dudar de todo, incluyendo nuestra propia existencia; esto le llevó a formular quizás la frase mejor conocida de toda la filosofía: “Pienso, luego existo.” En su libro *Discurso del Método* describió lo que ahora se conoce como plano cartesiano. Esta idea de combinar álgebra y geometría hizo posible que los matemáticos por primera vez gráfi-

caran funciones y así “vieran” las ecuaciones que estaban estudiando. El filósofo John Stuart Mill llamó a esta invención “el paso más grande jamás dado en el progreso de las ciencias exactas.” A Descartes le gustaba levantarse tarde y pasar la mañana en cama pensando y escribiendo. Inventó el plano de coordenadas estando en cama y viendo una mosca moverse en el techo, razonando que él podría describir la ubicación exacta de la mosca si supiera su distancia desde dos paredes perpendiculares. En 1649 Descartes se convirtió en tutor de la reina Cristina de Suecia, quien gustaba de sus lecciones a las 5 de la mañana cuando, decía, su mente estaba más aguda. Pero, el cambio en los hábitos de Descartes y la helada biblioteca donde estudiaba fueron demasiado para él. En febrero de 1650, después de una estancia de sólo dos meses, contrajo pulmonía y murió.

## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

## Computadoras

Durante siglos se han diseñado máquinas para que ejecuten trabajos específicos. Por ejemplo, una lavadora lava ropa, una tejedora teje telas, una sumadora suma números, y así sucesivamente. La computadora ha cambiado todo esto.

La computadora es una máquina que no hace nada sino hasta que se le dan instrucciones para que haga algo. Así es que una computadora puede jugar juegos, trazar imágenes o calcular  $\pi$  a un millón de lugares decimales; todo depende de qué programa (o instrucciones) se le den a la computadora. Ésta puede hacer todo esto porque puede aceptar instrucciones y lógicamente cambiar esas instrucciones basadas en datos de entrada. Esta versatilidad hace útiles a las computadoras en casi todo aspecto de la vida humana.

La idea de una computadora fue descrita teóricamente en la década de 1940 por el matemático Allan Turing (vea página 100) en lo que él llamó *máquina universal*. En 1945 el matemático John Von Neumann, ampliando las ideas de Turing, construyó una de las primeras computadoras electrónicas.

Los matemáticos continúan perfeccionando nuevas bases teóricas para el diseño de computadoras. El corazón de la computadora es el “chip,” que es capaz de procesar instrucciones lógicas. Para tener idea de la complejidad de un chip, considere que el chip Pentium tiene más de 3.5 millones de circuitos lógicos.

## EJEMPLO 3 | Combinación de desplazamientos horizontal y vertical

Trace la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ .

**SOLUCIÓN** Empezamos con la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  (Ejemplo 1(c), Sección 2.2) y la desplazamos 3 unidades a la derecha para obtener la gráfica de  $y = \sqrt{x-3}$ . A continuación desplazamos la gráfica resultante 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$  que se ve en la Figura 3.

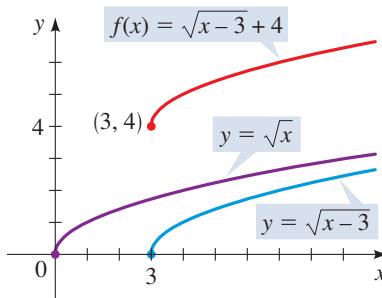


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 37

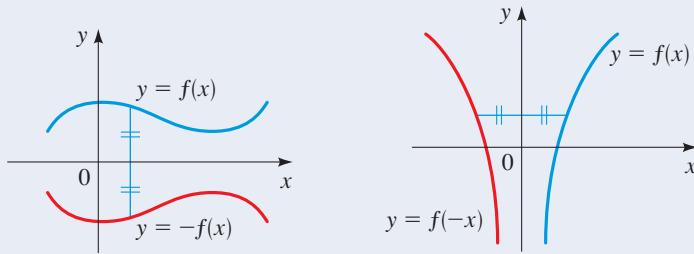
## ▼ Gráficas que se reflejan

Suponga que conocemos la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Cómo la usamos para obtener las gráficas de  $y = -f(x)$  y  $y = f(-x)$ ? La coordenada  $y$  de cada uno de los puntos en la gráfica de  $y = -f(x)$  es simplemente el negativo de la coordenada  $y$  del punto correspondiente en la gráfica de  $y = f(x)$ . Por lo tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $x$ . Por otra parte, el valor de  $y = f(-x)$  en  $x$  es igual al valor de  $y = f(x)$  en  $-x$ , por lo que la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $y$ . En el siguiente cuadro se resumen estas observaciones.

## GRÁFICAS QUE SE REFLEJAN

Para graficar  $y = -f(x)$ , refleja la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $x$ .

Para graficar  $y = f(-x)$ , refleja la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $y$ .



## EJEMPLO 4 | Gráficas que se reflejan

Trace la gráfica de cada función.

(a)  $f(x) = -x^2$       (b)  $g(x) = \sqrt{-x}$

## SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de  $y = x^2$ . La gráfica de  $f(x) = -x^2$  es la gráfica de  $y = x^2$  reflejada en el eje  $x$  (vea Figura 4).

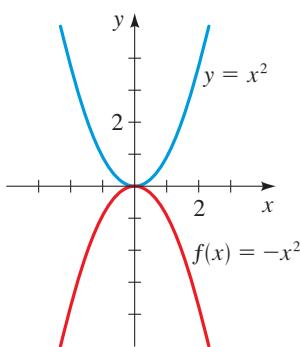


FIGURA 4

- (b) Empezamos con la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  (Ejemplo 1(c) en la Sección 2.2.) La gráfica de  $g(x) = \sqrt{-x}$  es la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  reflejada en el eje  $y$  (vea Figura 5). Observe que el dominio de la función  $g(x) = \sqrt{-x}$  es  $\{x \mid x \leq 0\}$ .

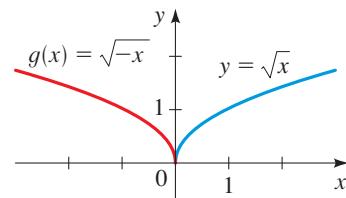


FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 31

### ▼ Alargamiento y contracción verticales

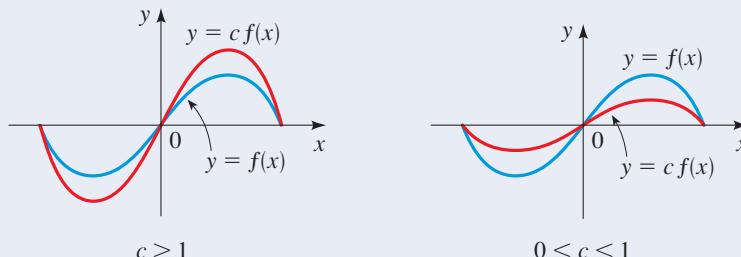
Suponga que conocemos la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Cómo la usamos para obtener la gráfica de  $y = cf(x)$ ? La coordenada  $y$  de  $y = cf(x)$  en  $x$  es igual que la coordenada  $y$  correspondiente de  $y = f(x)$  multiplicada por  $c$ . Multiplicar las coordenadas por  $c$  tiene el efecto de alargar o contraer verticalmente la gráfica en un factor de  $c$ .

#### ALARGAMIENTO Y CONTRACCIÓN VERTICALES DE GRÁFICAS

Para graficar  $y = cf(x)$ :

Si  $c > 1$ , alargue la gráfica de  $y = f(x)$  verticalmente en un factor de  $c$ .

Si  $0 < c < 1$ , contraiga la gráfica de  $y = f(x)$  verticalmente en un factor de  $c$ .



### EJEMPLO 5 | Alargamiento y contracción verticales de gráficas

Use la gráfica de  $f(x) = x^2$  para trazar la gráfica de cada función.

- (a)  $g(x) = 3x^2$       (b)  $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

#### SOLUCIÓN

- (a) La gráfica de  $g$  se obtiene al multiplicar por 3 la coordenada  $y$  de cada punto de la gráfica. Esto es, para obtener la gráfica de  $g$ , alargamos la gráfica de  $f$  verticalmente en un factor de 3. El resultado es la parábola más ancha de la Figura 6.
- (b) La gráfica de  $h$  se obtiene al multiplicar por  $\frac{1}{3}$  la coordenada  $y$  de cada punto de la gráfica de  $f$ . Esto es, para obtener la gráfica de  $h$ , contraemos la gráfica de  $f$  verticalmente en un factor de  $\frac{1}{3}$ . El resultado es la parábola más ancha de la Figura 6.

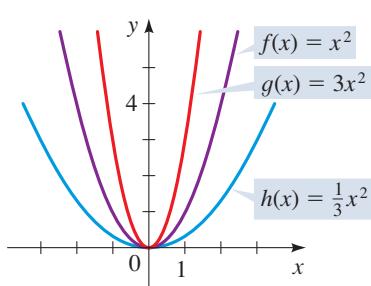


FIGURA 6

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 33 Y 35

Ilustramos el efecto de combinar desplazamientos, reflexiones y alargamiento en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 6** | Combinar desplazamiento, alargamiento y reflexión

Alargue la gráfica de la función  $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ .

**SOLUCIÓN** Empezando con la gráfica de  $y = x^2$ , primero desplazamos a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de  $y = (x - 3)^2$ . A continuación reflejamos en el eje  $x$  y alargamos por un factor de 2 para obtener la gráfica de  $y = -2(x - 3)^2$ . Finalmente, desplazamos hacia arriba 1 unidad para obtener la gráfica de  $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$  que se ve en la Figura 7.

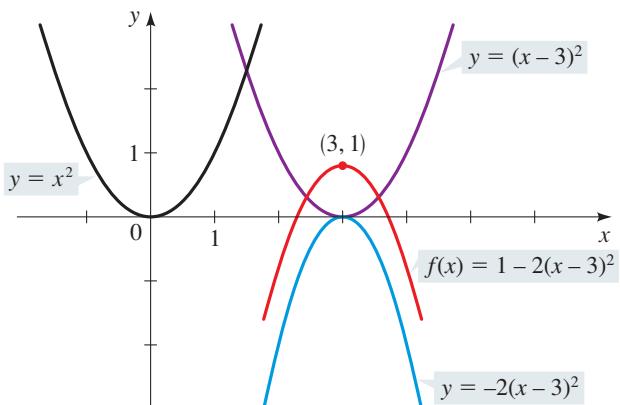


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39

**▼ Alargamiento y contracción horizontales**

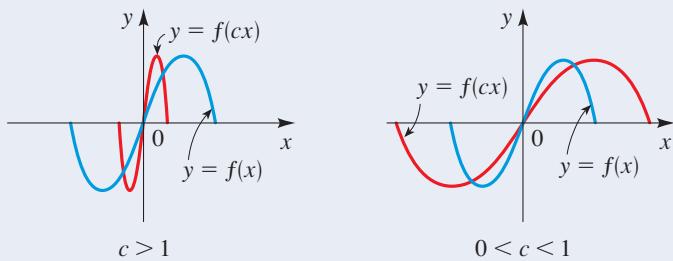
Ahora consideraremos la contracción y alargamiento horizontales de gráficas. Si conocemos la gráfica de  $y = f(x)$ , entonces ¿cómo está relacionada con ella la gráfica de  $y = f(cx)$ ? La coordenada  $y$  de  $y = f(cx)$  en  $x$  es la misma que la coordenada  $y$  de  $y = f(x)$  en  $cx$ . Por lo tanto, las coordenadas  $x$  de la gráfica de  $y = f(x)$  corresponden a las coordenadas  $x$  de la gráfica de  $y = f(cx)$  multiplicada por  $c$ . Viendo esto a la inversa, observamos que las coordenadas  $x$  de la gráfica de  $y = f(cx)$  son las coordenadas  $x$  de la gráfica de  $y = f(x)$  multiplicada por  $1/c$ . En otras palabras, para cambiar la gráfica de  $y = f(x)$  a la gráfica de  $y = f(cx)$ , debemos contraer (o alargar) la gráfica horizontalmente en un factor de  $1/c$ , como se resume en el siguiente recuadro.

**CONTRACCIÓN Y ALARGAMIENTO HORIZONTALS DE GRÁFICAS**

Para graficar  $y = f(cx)$ :

Si  $c > 1$ , contraiga la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor de  $1/c$ .

Si  $0 < c < 1$ , alargue la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor de  $1/c$ .

**EJEMPLO 7** | Alargamiento y contracción horizontales de gráficas

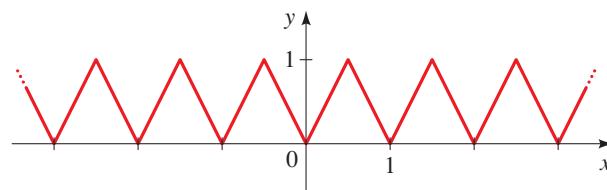
La gráfica de  $y = f(x)$  se muestra en la Figura 8 de la página siguiente. Trace la gráfica de cada función.

- (a)  $y = f(2x)$       (b)  $y = f(\frac{1}{2}x)$

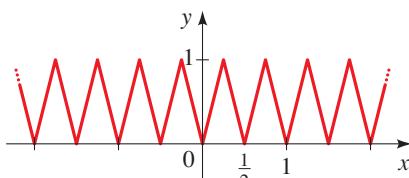
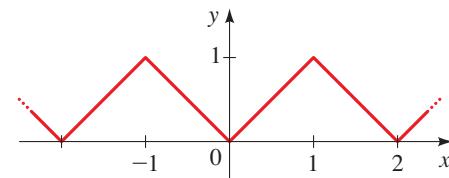


The Granger Collection, New York

**SONYA KOVALEVSKY** (1850-1891) es considerada la mujer matemática más importante del siglo xix. Nació en Moscú de una familia aristocrática. Cuando era niña, estudió los principios de cálculo en una forma muy poco común: su habitación estaba temporalmente tapizada con las páginas de un libro de cálculo. Tiempo después escribió que “pasaba muchas horas frente a aquella pared, tratando de entenderla”. Como las leyes rusas prohibían que las mujeres estudiaran en universidades contrajo un matrimonio por conveniencia, lo que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemáticas de la Universidad de Göttingen. Finalmente se le otorgó un profesorado de tiempo completo en la universidad de Estocolmo, donde fue profesora durante ocho años antes de morir por una epidemia de gripe a la edad de 41 años. Su investigación fue de gran utilidad para ayudar a poner las ideas y aplicaciones de funciones y cálculo en una base sólida y lógica. Recibió numerosos homenajes y premios por sus trabajos de investigación.

FIGURA 8  $y = f(x)$ 

**SOLUCIÓN** Usando los principios descritos en el recuadro precedente, obtener las gráficas de las Figuras 9 y 10.

FIGURA 9  $y = f(2x)$ FIGURA 10  $y = f(\frac{1}{2}x)$ 

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 63

### ▼ Funciones pares e impares

Si una función  $f$  satisface  $f(-x) = f(x)$  para todo número  $x$  en su dominio, entonces  $f$  recibe el nombre de **función par**. Por ejemplo, la función  $f(x) = x^2$  es función par porque

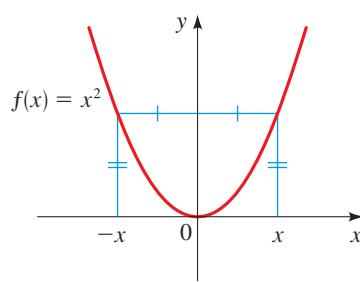
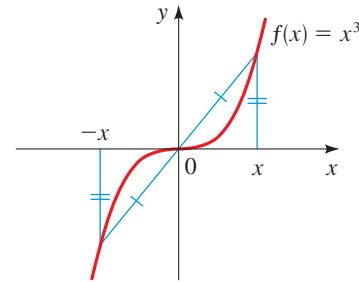
$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje  $y$  (vea Figura 11). Esto significa que si hemos trazado la gráfica de  $f$  para  $x \geq 0$ , entonces podemos obtener toda la gráfica simplemente al reflejar esta parte en el eje  $y$ .

Si  $f$  satisface  $f(-x) = -f(x)$  para todo número  $x$  en su dominio, entonces  $f$  se denomina **función impar**. Por ejemplo, la función  $f(x) = x^3$  es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica alrededor del origen (vea Figura 12). Si hemos trazado la gráfica de  $f$  para  $x \geq 0$ , entonces podemos obtener toda la gráfica al girar esta parte 180° alrededor del origen. (Esto es equivalente a reflejar primero en el eje  $x$  y luego en el eje  $y$ .)

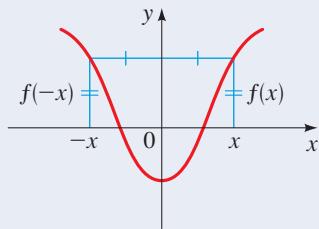
FIGURA 11  $f(x) = x^2$  es una función par.FIGURA 12  $f(x) = x^3$  es una función impar.

### FUNCIONES PARES E IMPARES

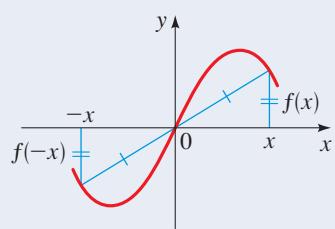
Sea  $f$  una función.

$f$  es **par** si  $f(-x) = f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .

$f$  es **ímpar** si  $f(-x) = -f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .



La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje  $y$ .



La gráfica de una función ímpar es simétrica con respecto al origen.

### EJEMPLO 8 | Funciones par e ímpar

Determine si las funciones son par, ímpar, o ninguna de éstas.

- (a)  $f(x) = x^5 + x$
- (b)  $g(x) = 1 - x^4$
- (c)  $h(x) = 2x - x^2$

#### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(-x) &= (-x)^5 + (-x) \\
 &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\
 &= -f(x)
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $f$  es una función ímpar.

$$\text{(b)} \quad g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Por tanto,  $g$  es par.

$$\text{(c)} \quad h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como  $h(-x) \neq h(x)$  y  $h(-x) \neq -h(x)$ , concluimos que  $h$  no es ni par ni ímpar.

► AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 75, 77 Y 79

Las gráficas de las funciones del Ejemplo 8 se muestran en la Figura 13. La gráfica de  $f$  es simétrica alrededor del origen, y la gráfica de  $g$  es simétrica alrededor del eje  $y$ . La gráfica de  $h$  no es simétrica ya sea alrededor del eje  $y$  o del origen.

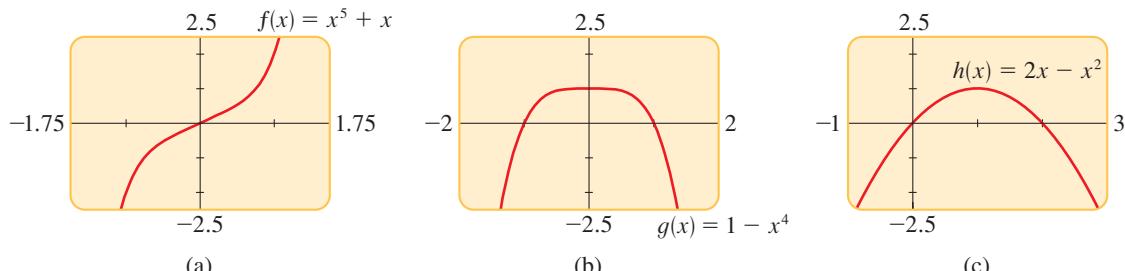


FIGURA 13

(a)

(b)

(c)

## 2.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1-2 ■ Llene el espacio en blanco con la dirección apropiada (izquierda, derecha, hacia arriba o hacia abajo).

1. (a) La gráfica de  $y = f(x) + 3$  se obtiene de la gráfica de

$y = f(x)$  al desplazar \_\_\_\_\_ 3 unidades.

- (b) La gráfica de  $y = f(x + 3)$  se obtiene de la gráfica de  $y = f(x)$  al desplazar \_\_\_\_\_ 3 unidades.

2. (a) La gráfica de  $y = f(x) - 3$  se obtiene de la gráfica de  $y = f(x)$  al desplazar \_\_\_\_\_ 3 unidades.

- (b) La gráfica de  $y = f(x - 3)$  se obtiene de la gráfica de  $y = f(x)$  al desplazar \_\_\_\_\_ 3 unidades.

3. Llene el espacio en blanco con el eje apropiado (eje  $x$  o eje  $y$ ).

- (a) La gráfica de  $y = -f(x)$  se obtiene de la gráfica de  $y = f(x)$  al reflejar en el \_\_\_\_\_.

- (b) La gráfica de  $y = f(-x)$  se obtiene de la gráfica de  $y = f(x)$  al reflejar en el \_\_\_\_\_.

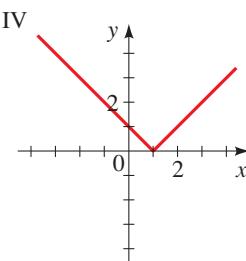
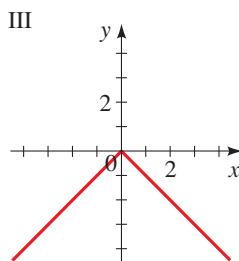
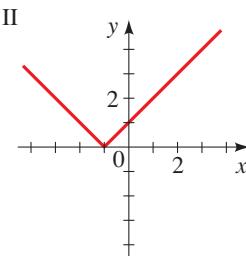
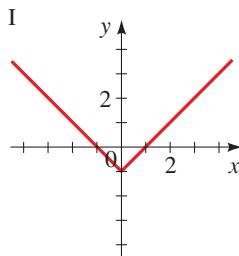
4. Relacione la gráfica con la función.

- (a)  $y = |x + 1|$

- (b)  $y = |x - 1|$

- (c)  $y = |x| - 1$

- (d)  $y = -|x|$



### HABILIDADES

5-14 ■ Suponga que nos dan la gráfica de  $f$ . Describa la forma en que la gráfica de cada función se puede obtener a partir de la gráfica de  $f$ .

5. (a)  $y = f(x) - 5$

- (b)  $y = f(x - 5)$

6. (a)  $y = f(x + 7)$

- (b)  $y = f(x) + 7$

7. (a)  $y = -f(x)$

- (b)  $y = f(-x)$

8. (a)  $y = -2f(x)$

- (b)  $y = -\frac{1}{2}f(x)$

9. (a)  $y = -f(x) + 5$

- (b)  $y = 3f(x) - 5$

10. (a)  $y = f(x - 4) + \frac{3}{4}$

- (b)  $y = f(x + 4) - \frac{3}{4}$

11. (a)  $y = 2f(x + 1) - 3$

- (b)  $y = 2f(x - 1) + 3$

12. (a)  $y = 3 - 2f(x)$

- (b)  $y = 2 - f(-x)$

13. (a)  $y = f(4x)$

- (b)  $y = f(\frac{1}{4}x)$

14. (a)  $y = f(2x) - 1$

- (b)  $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

15-18 ■ Explique cómo se obtiene la gráfica de  $g$  a partir de la gráfica de  $f$ .

15. (a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = (x + 2)^2$

- (b)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^2 + 2$

16. (a)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (x - 4)^3$

- (b)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x^3 - 4$

17. (a)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = |x + 2| - 2$

- (b)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = |x - 2| + 2$

18. (a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

- (b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{-x} + 1$

19. Use la gráfica de  $y = x^2$  de la Figura 4 para graficar lo siguiente.

- (a)  $g(x) = x^2 + 1$

- (b)  $g(x) = (x - 1)^2$

- (c)  $g(x) = -x^2$

- (d)  $g(x) = (x - 1)^2 + 3$

20. Use la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  de la Figura 5 para graficar lo siguiente.

- (a)  $g(x) = \sqrt{x - 2}$

- (b)  $g(x) = \sqrt{x} + 1$

- (c)  $g(x) = \sqrt{x + 2} + 2$

- (d)  $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

21-44 ■ Trace la gráfica de la función, no localizando los puntos sino empezando con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones.

21.  $f(x) = x^2 - 1$

22.  $f(x) = x^2 + 5$

23.  $f(x) = \sqrt{x} + 1$

24.  $f(x) = |x| - 1$

25.  $f(x) = (x - 5)^2$

26.  $f(x) = (x + 1)^2$

27.  $f(x) = \sqrt{x + 4}$

28.  $f(x) = |x - 3|$

29.  $f(x) = -x^3$

30.  $f(x) = -|x|$

31.  $y = \sqrt[4]{-x}$

32.  $y = \sqrt[3]{-x}$

33.  $y = \frac{1}{4}x^2$

34.  $y = -5\sqrt{x}$

35.  $y = 3|x|$

36.  $y = \frac{1}{2}|x|$

37.  $y = (x - 3)^2 + 5$

38.  $y = \sqrt{x + 4} - 3$

39.  $y = 3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

40.  $y = 2 - \sqrt{x + 1}$

41.  $y = |x + 2| + 2$

42.  $y = 2 - |x|$

43.  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$

44.  $y = 3 - 2(x - 1)^2$

45-54 ■ Nos dan una función  $f$ , y las transformaciones indicadas se aplican a su gráfica (en el orden dado). Escriba la ecuación para la gráfica final transformada.

45.  $f(x) = x^2$ ; desplazar hacia arriba 3 unidades

46.  $f(x) = x^3$ ; desplazar hacia abajo 1 unidad

47.  $f(x) = \sqrt{x}$ ; desplazar 2 unidades a la izquierda

48.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ; desplazar 1 unidad a la derecha

49.  $f(x) = |x|$ ; desplazar 3 unidades a la derecha y desplazar 1 unidad hacia arriba

50.  $f(x) = |x|$ ; desplazar 4 unidades a la izquierda y desplazar 1 unidad hacia abajo

51.  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ; reflejar en el eje  $y$  y desplazar hacia arriba 1 unidad

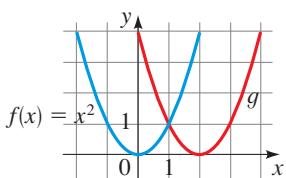
52.  $f(x) = x^2$ ; desplazar 2 unidades a la izquierda y reflejar en el eje  $x$

53.  $f(x) = x^2$ ; alargar verticalmente en un factor de 2, desplazar hacia abajo 2 unidades y desplazar 3 unidades a la derecha

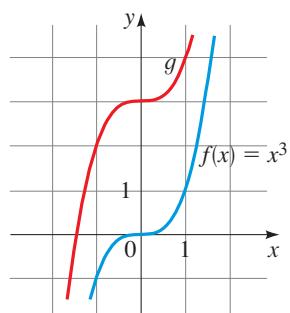
54.  $f(x) = |x|$ ; contraer verticalmente en un factor de  $\frac{1}{2}$ , desplazar a la izquierda 1 unidad y desplazar hacia arriba 3 unidades.

55-60 ■ Nos dan las gráficas de  $f$  y de  $g$ . Encuentre una fórmula para la función  $g$ .

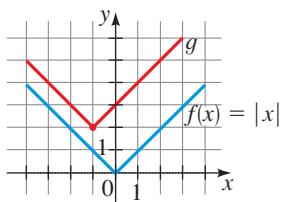
55.



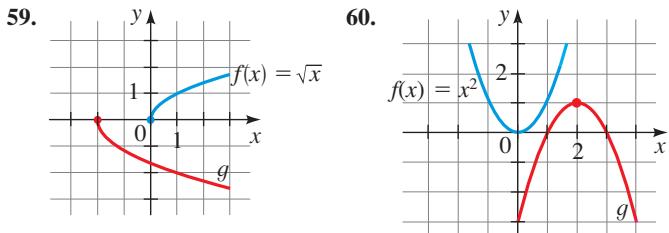
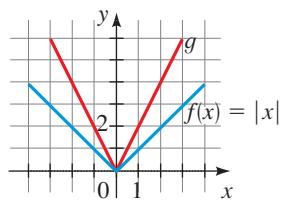
56.



57.



58.



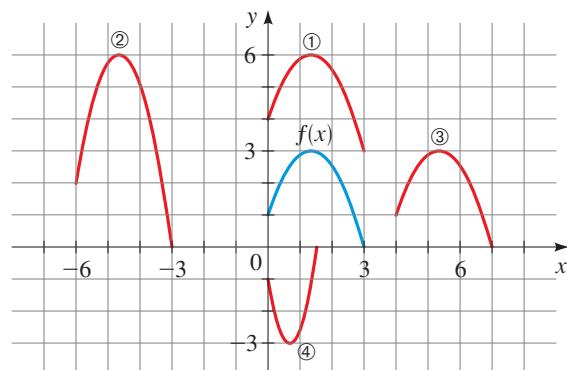
61-62 ■ Nos dan la gráfica de  $y = f(x)$ . Relacione cada ecuación con su gráfica.

61. (a)  $y = f(x - 4)$

(c)  $y = 2f(x + 6)$

(b)  $y = f(x) + 3$

(d)  $y = -f(2x)$

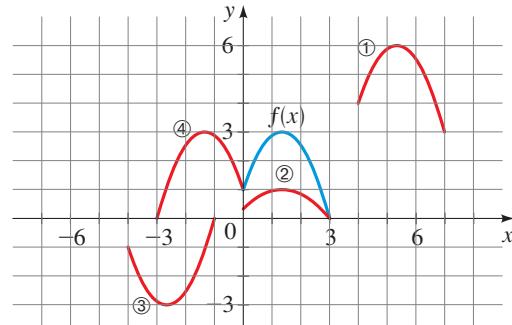


62. (a)  $y = \frac{1}{3}f(x)$

(c)  $y = f(x - 4) + 3$

(b)  $y = -f(x + 4)$

(d)  $y = f(-x)$



63. Nos dan la gráfica de  $f$ . Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a)  $y = f(x - 2)$

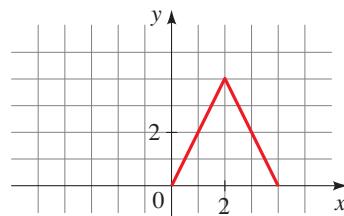
(c)  $y = 2f(x)$

(e)  $y = f(-x)$

(b)  $y = f(x) - 2$

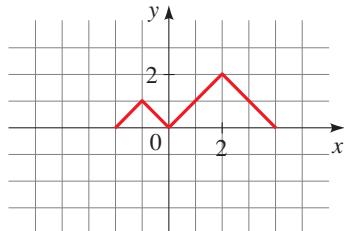
(d)  $y = -f(x) + 3$

(f)  $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



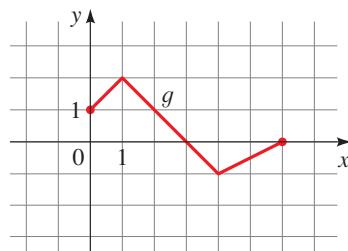
64. Nos dan la gráfica de  $g$ . Trace las gráficas de las siguientes funciones.

- (a)  $y = g(x + 1)$  (b)  $y = g(-x)$   
 (c)  $y = g(x - 2)$  (d)  $y = g(x) - 2$   
 (e)  $y = -g(x)$  (f)  $y = 2g(x)$



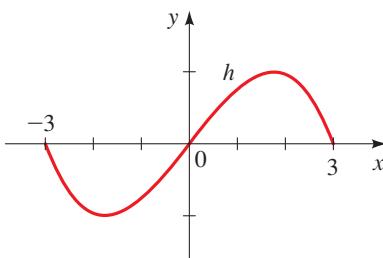
65. Nos dan la gráfica de  $g$ . Úsela para graficar cada una de las funciones siguientes.

- (a)  $y = g(2x)$  (b)  $y = g(\frac{1}{2}x)$



66. Nos dan la gráfica de  $h$ . Úsela para graficar cada una de las funciones siguientes.

- (a)  $y = h(3x)$  (b)  $y = h(\frac{1}{3}x)$



- 67-68 ■ Use la gráfica de  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  descrita en la página 156 para graficar la función indicada.

67.  $y = \lfloor 2x \rfloor$

68.  $y = \lfloor \frac{1}{4}x \rfloor$

- 69-72 ■ Grafique las funciones en cada pantalla usando el rectángulo de vista dado. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

69. Rectángulo de vista  $[-8, 8]$  por  $[-2, 8]$

- (a)  $y = \sqrt[4]{x}$  (b)  $y = \sqrt[4]{x + 5}$   
 (c)  $y = 2\sqrt[4]{x + 5}$  (d)  $y = 4 + 2\sqrt[4]{x + 5}$

70. Rectángulo de vista  $[-8, 8]$  por  $[-6, 6]$

- (a)  $y = |x|$  (b)  $y = -|x|$   
 (c)  $y = -3|x|$  (d)  $y = -3|x - 5|$

71. Rectángulo de vista  $[-4, 6]$  por  $[-4, 4]$

- (a)  $y = x^6$  (b)  $y = \frac{1}{3}x^6$   
 (c)  $y = -\frac{1}{3}x^6$  (d)  $y = -\frac{1}{3}(x - 4)^6$

72. Rectángulo de vista  $[-6, 6]$  por  $[-4, 4]$

- (a)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  (b)  $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$   
 (c)  $y = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$  (d)  $y = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - 3$

73. Si  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ , grafique las siguientes funciones en el rectángulo de vista  $[-5, 5]$  por  $[-4, 4]$ . ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

- (a)  $y = f(x)$  (b)  $y = f(2x)$  (c)  $y = f(\frac{1}{2}x)$

74. Si  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ , grafique las siguientes funciones en el rectángulo de vista  $[-5, 5]$  por  $[-4, 4]$ . ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

- (a)  $y = f(x)$  (b)  $y = f(-x)$   
 (c)  $y = -f(-x)$  (d)  $y = f(-2x)$   
 (e)  $y = f(-\frac{1}{2}x)$

- 75-82 ■ Determine si la función  $f$  es par, impar, o ninguna de éstas. Si  $f$  es par o impar, use simetría para trazar su gráfica.

75.  $f(x) = x^4$

76.  $f(x) = x^3$

77.  $f(x) = x^2 + x$

78.  $f(x) = x^4 - 4x^2$

79.  $f(x) = x^3 - x$

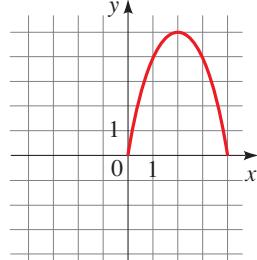
80.  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

81.  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$

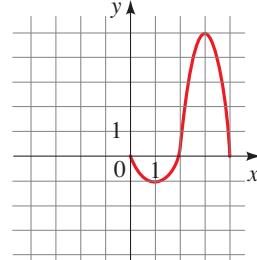
82.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- 83-84 ■ Nos dan la gráfica de una función definida por  $x \geq 0$ . Complete la gráfica para  $x < 0$  para hacer (a) una función par y (b) una función impar.

83.

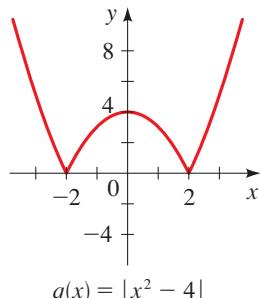
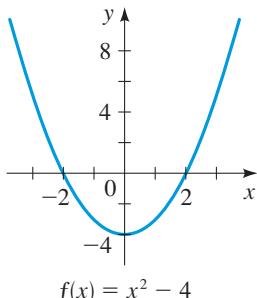


84.

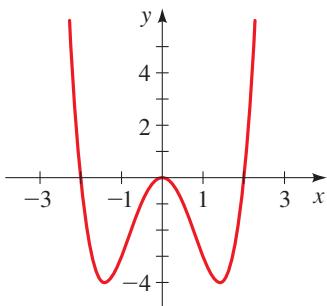


- 85-86 ■ Estos ejercicios muestran cómo se obtiene la gráfica de  $y = |f(x)|$  a partir de la gráfica de  $y = f(x)$ .

85. A continuación se presentan las gráficas de  $f(x) = x^2 - 4$  y  $g(x) = |x^2 - 4|$ . Explique cómo se obtiene la gráfica de  $g$  a partir de la gráfica de  $f$ .



86. Nos dan la gráfica de  $f(x) = x^4 - 4x^2$ . Use esta gráfica para trazar la gráfica de  $g(x) = |x^4 - 4x^2|$ .



- 87-88 ■ Trace la gráfica de cada función.

87. (a)  $f(x) = 4x - x^2$  (b)  $g(x) = |4x - x^2|$   
 88. (a)  $f(x) = x^3$  (b)  $g(x) = |x^3|$

## APLICACIONES

89. **Crecimiento en ventas** Las ventas anuales de cierta empresa pueden modelarse con la función  $f(t) = 4 + 0.01t^2$ , donde  $t$  representa los años desde 1900 y  $f(t)$  es medida en millones de dólares.
- (a) ¿Qué operaciones de cambio y reducción deben hacerse en la función  $y = t^2$  para obtener la función  $y = f(t)$ ?  
 (b) Suponga que  $t$  representa los años desde 2000 en vez de 1900. ¿Qué transformación podría aplicar a la función  $y = f(t)$  para lograr esto? Escriba la nueva función  $y = g(t)$  que resulta de esta transformación.

90. **Escalas de temperatura que cambia** La temperatura en cierta tarde está modelada por la función

$$C(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2$$

donde  $t$  representa horas después de las 12 del mediodía ( $0 \leq t \leq 6$ ) y  $C$  se mide en °C.

- (a) ¿Qué operaciones de desplazamiento y contracción deben efectuarse en la función  $y = t^2$  para obtener la función  $y = c(t)$ ?  
 (b) Supongamos que se desea medir la temperatura en °F. ¿Qué transformación tendría que aplicarse a la función  $y = C(t)$  para lograr esto? (Use el hecho de que la relación entre grados Celsius y Fahrenheit está dada por  $F = \frac{9}{5}C + 32$ . Escriba la nueva función  $y = F(t)$  que resulta de esta transformación.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

91. **Sumas de funciones pares e impares** Si  $f$  y  $g$  son funciones pares ambas, ¿ $f + g$  es necesariamente par? Si ambas son impares, ¿su suma es necesariamente impar? ¿Qué se puede decir acerca de la suma si una es impar y una es par? En cada caso, demuestre su respuesta.
92. **Productos de funciones pares e impares** Conteste las mismas preguntas del Ejercicio 91, excepto que esta vez considere el producto de  $f$  y  $g$  en lugar de la suma.
93. **Funciones de potencia pares e impares** ¿Qué debe ser cierto acerca del entero  $n$  si la función

$$f(x) = x^n$$

es una función par? ¿Si es una función impar? ¿Por qué piensa usted que los nombres “par” e “impar” se escogieron para estas propiedades de función?

## 2.6 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

### | Sumas, diferencias, productos y cocientes ► Composición de funciones

En esta sección estudiaremos diferentes maneras de combinar funciones para formar nuevas.

### ▼ Sumas, diferencias, productos y cocientes

Dos funciones  $f$  y  $g$  pueden combinarse para formar nuevas funciones  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  y  $f/g$  de un modo semejante a como sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números reales. Por ejemplo, definimos la función  $f + g$  por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La nueva función  $f + g$  se denomina **suma** de las funciones  $f$  y  $g$ ; su valor en  $x$  es  $f(x) + g(x)$ . Desde luego, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si  $f(x)$  y  $g(x)$  están definidas, es decir, si  $f$  pertenece al dominio de  $f$  y también al dominio de  $g$ . Por lo tanto, si el dominio de  $f$  es  $A$  y el dominio de  $g$  es  $B$ , entonces el dominio  $f + g$  es la intersección de estos dominios, o sea  $A \cap B$ . Análogamente, podemos definir la **diferencia**  $f - g$ , el **producto**  $fg$  y el **cociente**  $f/g$  de las funciones  $f$  y  $g$ . Sus dominios son  $A \cap B$ , pero en el caso del cociente debemos recordar no dividir entre 0.

La suma de  $f$  y  $g$  está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es “ $f + g$ ”. Por lo tanto, este signo + representa la operación de adición de *funciones*, pero el signo + del lado derecho representa adición de los *números*  $f(x)$  y  $g(x)$ .

## ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sean  $f$  y  $g$  funciones con dominios  $A$  y  $B$ . Entonces las funciones  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  y  $f/g$  están definidas como sigue.

$$\begin{aligned}
 (f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{Dominio } A \cap B \\
 (f - g)(x) &= f(x) - g(x) && \text{Dominio } A \cap B \\
 (fg)(x) &= f(x)g(x) && \text{Dominio } A \cap B \\
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && \text{Dominio } \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}
 \end{aligned}$$

### EJEMPLO 1 | Combinaciones de funciones y sus dominios

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{x-2} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

- (a) Encuentre las funciones  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$ , y  $f/g$  y sus dominios.  
 (b) Encuentre  $(f + g)(4)$ ,  $(f - g)(4)$ ,  $(fg)(4)$ , y  $(f/g)(4)$ .

#### SOLUCIÓN

- (a) El dominio de  $f$  es  $\{x \mid x \neq 2\}$ , y el dominio de  $g$  es  $\{x \mid x \geq 0\}$ . La intersección de los dominios de  $f$  y  $g$  es

$$\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\} = [0, 2) \cup (2, \infty)$$

Por lo tanto, tenemos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} \quad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} \quad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \quad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

Para dividir fracciones, invierta el denominador y multiplique:

$$\begin{aligned}
 \frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}} &= \frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}/1} \\
 &= \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Observe que en el dominio de  $f/g$  excluimos 0 porque  $g(0) = 0$ .

- (b) Cada uno de estos valores existe porque  $x = 4$  está en el dominio de cada función.

$$(f + g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$(f - g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

La gráfica de la función  $f + g$  puede obtenerse de las gráficas de  $f$  y  $g$  por **suma gráfica**. Esto significa que sumamos las coordenadas y correspondientes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2 | Uso de suma gráfica

Las gráficas de  $f$  y  $g$  se muestran en la Figura 1. Use suma gráfica para graficar la función de  $f + g$ .

**SOLUCIÓN** Obtenemos la gráfica de  $f + g$  al “sumar gráficamente” el valor de  $f(x)$  a  $g(x)$  como se ve en la Figura 2. Esto se implementa al copiar el segmento de recta  $PQ$  sobre el de  $PR$  para obtener el punto  $S$  en la gráfica de  $f + g$ .

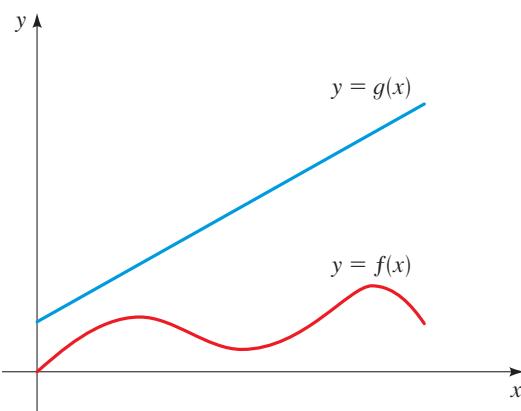


FIGURA 1

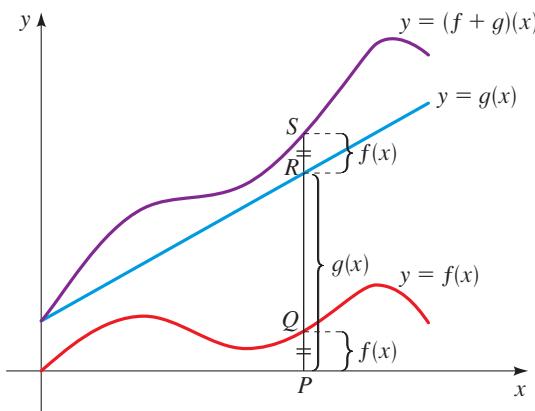


FIGURA 2 Suma gráfica

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

## ▼ Composición de funciones

Ahora consideremos una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x^2 + 1$ . Podemos definir una nueva función  $h$  como

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función  $h$  está formada por las funciones  $f$  y  $g$  en una forma interesante: dado un número  $x$ , primero le aplicamos la función  $g$  y luego aplicamos  $f$  al resultado. En este caso,  $f$  es la regla “tome la raíz cuadrada”,  $g$  es la regla “eleve al cuadrado, luego sume 1”, y  $h$  es la regla “eleve al cuadrado, luego sume 1, luego tome la raíz cuadrada”. En otras palabras, obtenemos la regla  $h$  al aplicar la regla  $g$  y luego la regla  $f$ . La Figura 3 muestra un diagrama de máquina para  $h$ .

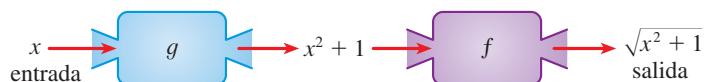


FIGURA 3 La máquina  $h$  está compuesta de la máquina  $g$  (primero) y luego por la máquina  $f$ .

En general, dadas dos funciones  $f$  y  $g$  cualesquiera, empezamos con un número  $x$  en el dominio de  $g$  y su imagen  $g(x)$ . Si este número  $g(x)$  está en el dominio de  $f$ , podemos entonces calcular el valor de  $f(g(x))$ . El resultado es una nueva función  $h(x) = f(g(x))$  que se obtiene al sustituir  $g$  en  $f$ . Se denomina la *composición* (o *compuesta*) de  $f$  y  $g$ , y se denota con  $f \circ g$  (“ $f$  compuesta con  $g$ ”).

## COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , la **función compuesta**  $f \circ g$  (también llamada **composición** de  $f$  y  $g$ ) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de  $f \circ g$  es el conjunto de toda  $x$  en el dominio de  $g$  tal que  $g(x)$  está en el dominio de  $f$ . En otras palabras,  $(f \circ g)(x)$  está definida siempre que tanto  $g(x)$  como  $f(g(x))$  estén definidas. Podemos describir  $f \circ g$  usando un diagrama de flechas (Figura 4).

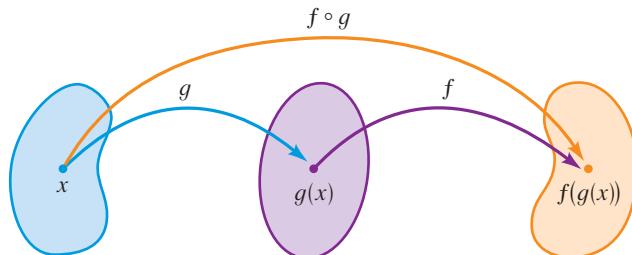


FIGURA 4 Diagrama de flechas para  $f \circ g$

### EJEMPLO 3 | Hallar la composición de funciones

Sean  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x - 3$ .

- Encuentre las funciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$  y sus dominios.
- Encuentre  $(f \circ g)(5)$  y  $(g \circ f)(7)$ .

#### SOLUCIÓN

En el ejemplo 3,  $f$  es la regla "elevar al cuadrado" y  $g$  es la regla "reste 3". La función  $f \circ g$  primero resta 3 y luego eleva al cuadrado; la función  $g \circ f$  primero eleva al cuadrado y luego resta tres.

- Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x - 3) && \text{Definición de } g \\ &= (x - 3)^2 && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\ &= g(x^2) && \text{Definición de } f \\ &= x^2 - 3 && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Los dominios tanto de  $f \circ g$  como de  $g \circ f$  son  $\mathbb{R}$ .

- Tenemos

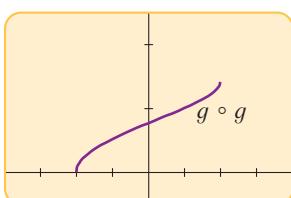
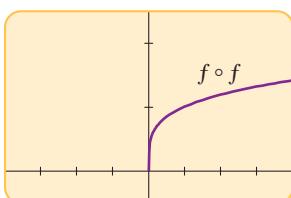
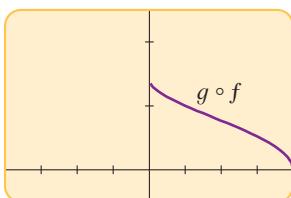
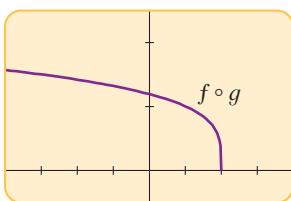
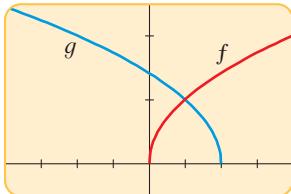
$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4$$

$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46$$

#### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 21 Y 35

Del Ejemplo 3 se puede ver que, en general,  $f \circ g \neq g \circ f$ . Recuerde que la notación  $f \circ g$  quiere decir que la función  $g$  se aplica primero y luego  $f$  se aplica en segundo lugar.

Las gráficas de  $f$  y  $g$  del Ejemplo 4, así como las de  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ , se muestran a continuación. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones que son bastante diferentes de las funciones originales.



### EJEMPLO 4 | Hallar la composición de funciones

Si  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = \sqrt{2 - x}$ , encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

- (a)  $f \circ g$       (b)  $g \circ f$       (c)  $f \circ f$       (d)  $g \circ g$

#### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{\sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt[4]{2 - x} \end{aligned}$$

El dominio de  $f \circ g$  es  $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$ .

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\ &= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{x}} && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Para que  $\sqrt{x}$  esté definida, debemos tener  $x \geq 0$ . Para que  $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$  esté definida, debemos tener  $2 - \sqrt{x} \geq 0$ , es decir,  $\sqrt{x} \leq 2$ , o  $x \leq 4$ . Entonces, tenemos  $0 \leq x \leq 4$  de modo que el dominio de  $g \circ f$  es el intervalo cerrado  $[0, 4]$ .

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad (f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f \\ &= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt[4]{x} \end{aligned}$$

El dominio de  $f \circ f$  es  $[0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad (g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g \\ &= g(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Esta expresión está definida cuando  $2 - x \geq 0$  y  $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$ . La primera desigualdad quiere decir que  $x \leq 2$ , y la segunda es equivalente a  $\sqrt{2 - x} \leq 2$ , o  $2 - x \leq 4$ , o  $x \geq -2$ . Por tanto,  $-2 \leq x \leq 2$ , de modo que el dominio de  $g \circ g$  es  $[-2, 2]$ .

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 41

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta  $f \circ g \circ h$  se encuentra al aplicar  $h$  primero, después  $g$  y luego  $f$  como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

### EJEMPLO 5 | Una composición de tres funciones

Encuentre  $f \circ g \circ h$  si  $f(x) = x/(x + 1)$ ,  $g(x) = x^{10}$  y  $h(x) = x + 3$ .

#### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} (f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{Definición de } f \circ g \circ h \\ &= f(g(x + 3)) && \text{Definición de } h \\ &= f((x + 3)^{10}) && \text{Definición de } g \\ &= \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1} && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

Hasta este punto hemos empleado composición para construir funciones complicadas a partir de unas más sencillas, pero, en cálculo, es útil saber “descomponer” una función complicada en unas más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 6 | Reconocer una composición de funciones

Dada  $F(x) = \sqrt[4]{x+9}$ , encuentre funciones  $f$  y  $g$  tales que  $F = f \circ g$ .

**SOLUCIÓN** Como la fórmula de  $F$  dice que primero sumamos 9 y luego tomamos la raíz cuarta, hacemos

$$g(x) = x + 9 \quad \text{y} \quad f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Y a continuación

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x+9) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt[4]{x+9} && \text{Definición de } f \\ &= F(x) \end{aligned}$$

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 49

### EJEMPLO 7 | Una aplicación de composición de funciones

Un barco está navegando a 20 mi/h paralelo a un borde recto de la playa. El barco está a 5 millas de la playa y pasa frente a un faro al mediodía.

- Exprese la distancia  $s$  entre el faro y el barco como función de  $d$ , la distancia que el barco ha navegado desde el mediodía; es decir, encuentre  $f$  de modo que  $s = f(d)$ .
- Exprese  $d$  como función de  $t$ , el tiempo transcurrido desde el mediodía; esto es, encuentre  $g$  para que  $d = g(t)$ .
- Encuentre  $f \circ g$ . ¿Qué representa esta función?

**SOLUCIÓN** Primero trazamos un diagrama como el de la Figura 5.

- Podemos relacionar las distancias  $s$  y  $d$  por el Teorema de Pitágoras. Así,  $s$  puede ser expresada como función de  $d$  por

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$$

- Como el barco está navegando a 20 mi/h, la distancia  $d$  que ha recorrido es una función de  $t$  como sigue:

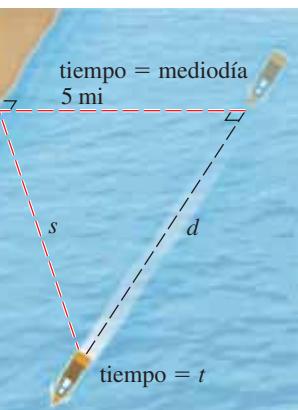


FIGURA 5

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}$$

$$d = g(t) = 20t$$

- Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(g(t)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(20t) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{25 + (20t)^2} && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

La función  $f \circ g$  da la distancia del barco desde el faro como función del tiempo.

### AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 63

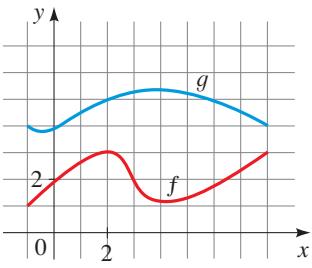
## 2.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. De las gráficas de  $f$  y  $g$  de la figura, encontramos

$$(f + g)(2) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (f - g)(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(fg)(2) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$



2. Por definición,  $f \circ g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ . Por tanto, si  $g(2) = 5$  y  $f(5) = 12$ , entonces  $f \circ g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. Si la regla de la función  $f$  es “sumar 1” y la regla de la función  $g$  es “multiplicar por 2,” entonces la regla de  $f \circ g$  es

“\_\_\_\_\_,”

y la regla de  $g \circ f$  es

“\_\_\_\_\_.”

4. Podemos expresar algebraicamente las funciones del Ejercicio 3 como

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f \circ g(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad g \circ f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

### HABILIDADES

5-10 ■ Encuentre  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  y  $f/g$  y sus dominios.

5.  $f(x) = x - 3$ ,  $g(x) = x^2$

6.  $f(x) = x^2 + 2x$ ,  $g(x) = 3x^2 - 1$

7.  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $g(x) = \sqrt{1 + x}$

8.  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

9.  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $g(x) = \frac{4}{x + 4}$

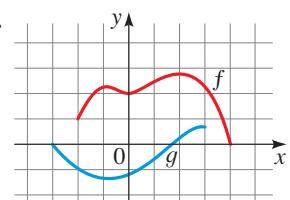
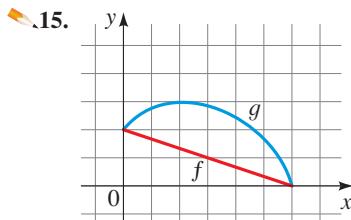
10.  $f(x) = \frac{2}{x + 1}$ ,  $g(x) = \frac{x}{x + 1}$

11-14 ■ Encuentre el dominio de la función.

11.  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$       12.  $g(x) = \sqrt{x + 1} - \frac{1}{x}$

13.  $h(x) = (x - 3)^{-1/4}$       14.  $k(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

15-16 ■ Use suma gráfica para trazar la gráfica de  $f + g$ .



17-20 ■ Trace las gráficas de  $f$ ,  $g$  y  $f + g$  en una pantalla común para ilustrar la adición gráfica.

17.  $f(x) = \sqrt{1 + x}$ ,  $g(x) = \sqrt{1 - x}$

18.  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

19.  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \frac{1}{3}x^3$

20.  $f(x) = \sqrt[4]{1 - x}$ ,  $g(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$

21-26 ■ Use  $f(x) = 3x - 5$  y  $g(x) = 2 - x^2$  para evaluar la expresión.

21. (a)  $f(g(0))$       (b)  $g(f(0))$

22. (a)  $f(f(4))$       (b)  $g(g(3))$

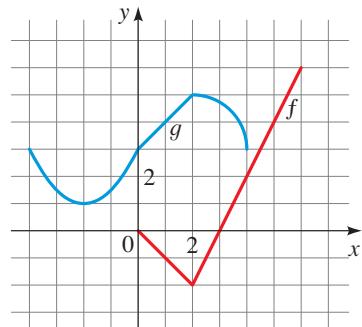
23. (a)  $(f \circ g)(-2)$       (b)  $(g \circ f)(-2)$

24. (a)  $(f \circ f)(-1)$       (b)  $(g \circ g)(2)$

25. (a)  $(f \circ g)(x)$       (b)  $(g \circ f)(x)$

26. (a)  $(f \circ f)(x)$       (b)  $(g \circ g)(x)$

27-32 ■ Use las gráficas dadas de  $f$  y  $g$  para evaluar la expresión.



27.  $f(g(2))$

28.  $g(f(0))$

29.  $(g \circ f)(4)$

30.  $(f \circ g)(0)$

31.  $(g \circ g)(-2)$

32.  $(f \circ f)(4)$

**33-44** ■ Encuentre las funciones  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$  y sus dominios.

33.  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = 4x - 1$

34.  $f(x) = 6x - 5$ ,  $g(x) = \frac{x}{2}$

35.  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x + 1$

36.  $f(x) = x^3 + 2$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x}$

37.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 2x + 4$

38.  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x - 3}$

39.  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = 2x + 3$

40.  $f(x) = x - 4$ ,  $g(x) = |x + 4|$

41.  $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ ,  $g(x) = 2x - 1$

42.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $g(x) = x^2 - 4x$

43.  $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$

44.  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $g(x) = \frac{x}{x + 2}$

**45-48** ■ Encuentre  $f \circ g \circ h$ .

45.  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $h(x) = x - 1$

46.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = x^2 + 2$

47.  $f(x) = x^4 + 1$ ,  $g(x) = x - 5$ ,  $h(x) = \sqrt{x}$

48.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{x}{x - 1}$ ,  $h(x) = \sqrt[3]{x}$

**49-54** ■ Exprese la función en la forma  $f \circ g$ .

49.  $F(x) = (x - 9)^5$

50.  $F(x) = \sqrt{x} + 1$

51.  $G(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$

52.  $G(x) = \frac{1}{x + 3}$

53.  $H(x) = |1 - x^3|$

54.  $H(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

**55-58** ■ Exprese la función en la forma  $f \circ g \circ h$ .

55.  $F(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

56.  $F(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

57.  $G(x) = (4 + \sqrt[3]{x})^9$

58.  $G(x) = \frac{2}{(3 + \sqrt{x})^2}$

## APLICACIONES

**59-60** ■ **Ingreso, costo y utilidad** Un taller de imprenta hace calcomanías para pegarse en los parachoques de autos para campañas políticas. Si  $x$  calcomanías son solicitadas (donde  $x < 10,000$ ) entonces el precio por calcomanía es  $0.15 - 0.000002x$  dólares, y el costo total por producir el pedido es  $0.095x - 0.0000005x^2$  dólares.

59. Use el hecho de que

$$\text{ingreso} = \text{precio por artículo} \times \text{número de artículos vendidos}$$

para expresar  $R(x)$ , el ingreso por un pedido de  $x$  calcomanías, como producto de dos funciones de  $x$ .

60. Use el hecho de que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo}$$

para expresar  $P(x)$ , la utilidad de un pedido de  $x$  calcomanías, como diferencia de dos funciones de  $x$ .

**61. Área de una onda** Se deja caer una piedra en un lago, creando una onda circular que se mueve hacia fuera con una rapidez de 60 cm/s.

- (a) Encuentre una función  $g$  que modele el radio como función del tiempo.
- (b) Encuentre una función  $f$  que modele el área del círculo como función del radio.
- (c) Encuentre  $f \circ g$ . ¿Qué representa esta función?



**62. Inflar un globo** Un globo esférico está siendo inflado. El radio del globo es creciente a razón de 1 cm/s.

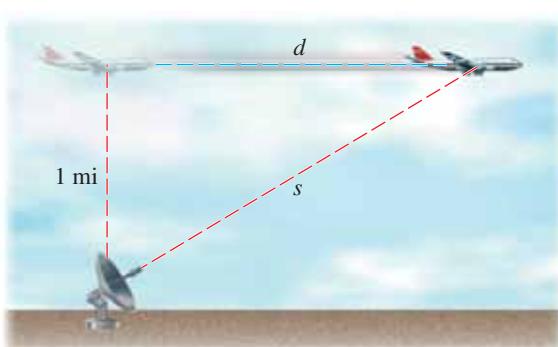
- (a) Encuentre una función  $f$  que modele el radio como función del tiempo.
- (b) Encuentre una función  $g$  que modele el volumen como función del radio.
- (c) Encuentre  $f \circ g$ . ¿Qué representa esta función?

**63. Área de un globo** Un globo esférico de meteorología está siendo inflado. El radio del globo es creciente a razón de 2 cm/s. Exprese el área superficial del globo como función del tiempo  $t$  (en segundos).

**64. Descuentos múltiples** Una persona tiene un cupón de \$50 del fabricante, bueno para la compra de un teléfono celular. La tienda donde compra el teléfono está ofreciendo un 20% de descuento en todos los teléfonos celulares. Represente con  $x$  el precio regular del teléfono celular.

- (a) Suponga que sólo aplica el 20% de descuento. Encuentre una función que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio regular  $x$ .

- (b) Suponga que sólo aplica el cupón de \$50. Encuentre una función  $g$  que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio  $x$  de la etiqueta.
- (c) Si se puede usar el cupón y el descuento, entonces el precio de compra es ya sea  $f \circ g(x)$  o  $g \circ f(x)$ , dependiendo del pedido en el que se aplique el precio. Encuentre  $f \circ g(x)$  y  $g \circ f(x)$ . ¿Cuál composición da el precio más bajo?
- 65. Descuentos múltiples** Un distribuidor de aparatos electrodomésticos anuncia un 10% de descuento en todas sus máquinas lavarropas. Además, el fabricante ofrece un descuento de \$100 sobre la compra de una lavarropas. Represente con  $x$  el precio de la etiqueta de la máquina lavarropas.
- (a) Suponga que sólo aplica el 10% de descuento. Encuentre una función  $f$  que modele el precio de compra de la lavarropas como función del precio  $x$  de etiqueta.
- (b) Suponga que sólo aplica el descuento de \$100. Encuentre una función  $g$  que modele el precio de compra de la lavarropas como función del precio  $x$  de etiqueta.
- (c) Encuentre  $f \circ g$  y  $g \circ f$ . ¿Qué representan estas funciones? ¿Cuál es el mejor trato?
- 66. Trayectoria de un avión** Un avión está volando con una rapidez de 350 mi/h a una altitud de 1 milla. El avión pasa directamente arriba de una estación de radar en el tiempo  $t = 0$ .
- (a) Exprese la distancia  $s$  (en millas) entre el avión y la estación de radar como función de la distancia horizontal  $d$  (en millas) que el avión ha volado.
- (b) Exprese  $d$  como función del tiempo  $t$  (en horas) que el avión ha volado.
- (c) Use composición para expresar  $s$  como función de  $t$ .



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

- 67. Interés compuesto** Una cuenta de ahorros gana 5% de interés compuesto anualmente. Si una persona invierte  $x$  dólares en esa cuenta, entonces la cantidad  $A(x)$  de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5%; es decir,

$$A(x) = x + 0.05x = 1.05x$$

Encuentre

$$A \circ A$$

$$A \circ A \circ A$$

$$A \circ A \circ A \circ A$$

¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para lo que la persona obtiene cuando capitalice  $n$  copias de  $A$ .

- 68. Composición de funciones lineales** Las gráficas de las funciones

$$f(x) = m_1x + b_1$$

$$g(x) = m_2x + b_2$$

son rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. ¿Es una recta de la gráfica  $f \circ g$ ? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

- 69. Despejar una función desconocida de una ecuación** Suponga que

$$g(x) = 2x + 1$$

$$h(x) = 4x^2 + 4x + 7$$

Encuentre una función  $f$  tal que  $f \circ g = h$ . (Piense en qué operaciones tendrá que efectuar en la fórmula de  $g$  para terminar con la fórmula de  $h$ .) Ahora suponga que

$$f(x) = 3x + 5$$

$$h(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

Utilice la misma clase de razonamiento para hallar una función  $g$  tal que  $f \circ g = h$ .

- 70. Composiciones de funciones impares y pares** Suponga que

$$h = f \circ g$$

Si  $g$  es una función par, ¿ $h$  es necesariamente par? Si  $g$  es impar, ¿ $h$  es impar? ¿Qué pasa si  $g$  es par y  $f$  es impar? ¿Qué pasa si  $g$  es impar y  $f$  es par?

### PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

#### Iteración y caos

En este proyecto exploramos el proceso de componer repetidamente una función consigo misma; el resultado puede ser regular o caótico. Usted puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: [www.stewartmath.com](http://www.stewartmath.com)

## 2.7 FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

### Funciones uno a uno ► La inversa de una función ► Graficar la inversa de una función

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por lo tanto, la inversa “deshace” o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno*.

### ▼ Funciones uno a uno

Comparemos las funciones  $f$  y  $g$  cuyos diagramas de flecha se muestran en la Figura 1. Observe que  $f$  nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en  $A$  tienen imágenes diferentes), mientras que  $g$  toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos,  $g(2) = g(3)$  pero  $f(x_1) \neq f(x_2)$  siempre que  $x_1 \neq x_2$ . Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.

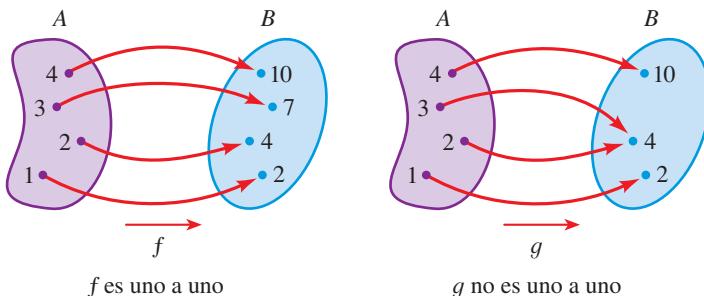


FIGURA 1

### DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Una función con dominio  $A$  se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de  $A$  que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

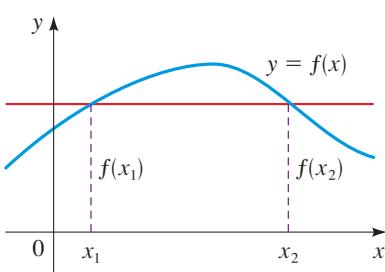


FIGURA 2 Esta función no es uno a uno porque  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Una forma equivalente de escribir la condición para una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

Si una recta horizontal cruza la gráfica de  $f$  en más de un punto, entonces vemos de la Figura 2 que hay números  $x_1 \neq x_2$  tales que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Esto significa que  $f$  no es uno a uno. Por lo tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

### PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

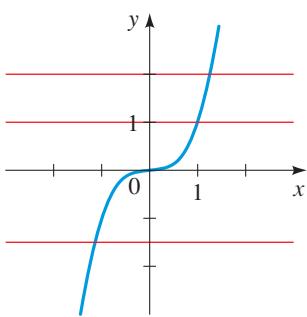


FIGURA 3  $f(x) = x^3$  es uno a uno.

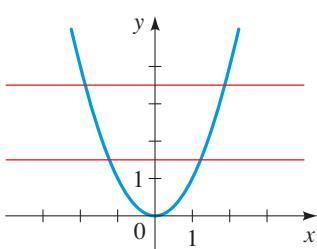


FIGURA 4  $f(x) = x^2$  no es uno a uno.

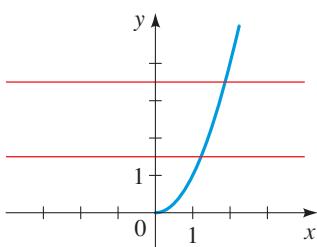


FIGURA 5  $f(x) = x^2$  ( $x \geq 0$ ) es uno a uno.

### EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función  $f(x) = x^3$  es uno a uno?

**SOLUCIÓN 1** Si  $x_1 \neq x_2$ , entonces  $x_1^3 \neq x_2^3$  (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto,  $f(x) = x^3$  es uno a uno.

**SOLUCIÓN 2** De la Figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de  $f(x) = x^3$  más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal,  $f$  es uno a uno.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13

Observe que la función  $f$  del Ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede demostrar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno*.

### EJEMPLO 2 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función  $g(x) = x^2$  es uno a uno?

**SOLUCIÓN 1** Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \quad \text{y} \quad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y -1 tienen la misma imagen.

**SOLUCIÓN 2** De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de  $g$  más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal,  $g$  no es uno a uno.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

Aun cuando la función  $g$  del Ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de manera que la función resultante sea uno a uno. De hecho, definimos

$$h(x) = x^2 \quad x \geq 0$$

entonces  $h$  es uno a uno, como se puede ver de la Figura 5 y de la Prueba de la Recta Horizontal.

### EJEMPLO 3 | Demostrar que una función es uno a uno

Demuestre que la función  $f(x) = 3x + 4$  es uno a uno.

**SOLUCIÓN** Suponga que hay números  $x_1$  y  $x_2$  tales que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Entonces

$$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \quad \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2)$$

$$3x_1 = 3x_2 \quad \text{Reste 4}$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto,  $f$  es uno a uno.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11

## ▼ La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

### DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea  $f$  una función uno a uno con dominio  $A$  y rango  $B$ . Entonces su **función inversa**  $f^{-1}$  tiene dominio  $B$  y rango  $A$  y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

para cualquier  $y$  en  $B$ .

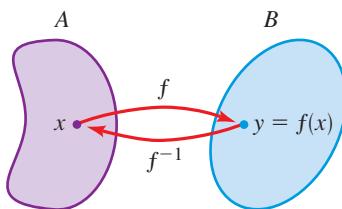


FIGURA 6

⊗ No confunda el  $-1$  de  $f^{-1}$  por un exponente.

$$f^{-1}(x) \text{ no significa } \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco  $1/f(x)$  se escribe como  $(f(x))^{-1}$ .

### EJEMPLO 4 | Hallar $f^{-1}$ para valores específicos

Si  $f(1) = 5, f(3) = 7$  y  $f(8) = -10$ , hallar  $f^{-1}(5), f^{-1}(7)$  y  $f^{-1}(-10)$ .

**SOLUCIÓN** De la definición de  $f^{-1}$  tenemos

$$f^{-1}(5) = 1 \text{ porque } f(1) = 5$$

$$f^{-1}(7) = 3 \text{ porque } f(3) = 7$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \text{ porque } f(8) = -10$$

La Figura 7 muestra cómo  $f^{-1}$  invierte el efecto de  $f$  en este caso.

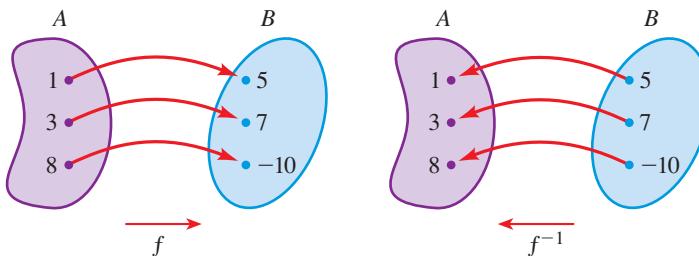


FIGURA 7

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

Por definición, la función inversa  $f^{-1}$  deshace lo que  $f$  hace: si empezamos con  $x$ , aplicamos  $f$  y luego aplicamos  $f^{-1}$ , llegamos otra vez a  $x$ , donde empezamos. Análogamente,  $f$  deshace lo que  $f^{-1}$  hace. En general, cualquier función que invierte el efecto de  $f$  en esta forma debe ser la inversa de  $f$ . Estas observaciones se expresan precisamente como sigue.

### PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea  $f$  una función uno a uno con dominio  $A$  y rango  $B$ . La función inversa  $f^{-1}$  satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } B$$

Recíprocamente, cualquier función  $f^{-1}$  que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de  $f$ .

Estas propiedades indican que  $f$  es la función inversa de  $f^{-1}$ , de modo que decimos que  $f$  y  $f^{-1}$  son *inversas entre sí*.

### EJEMPLO 5 | Verificar que dos funciones son inversas

Demuestre que  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = x^{1/3}$  son inversas entre sí.

**SOLUCIÓN** Observe que el dominio y rango de  $f$  y de  $g$  es  $\mathbb{R}$ . Tenemos

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x \\f(g(x)) &= f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Propiedad de Funciones Inversas,  $f$  y  $g$  son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente dicen que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando son compuestas, se cancelan entre sí.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

Ahora examinemos la forma en que calculamos funciones inversas. Primero observamos de la definición de  $f^{-1}$  que

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Por tanto, si  $y = f(x)$  y si podemos despejar  $x$  de esta ecuación en términos de  $y$ , entonces debemos tener  $x = f^{-1}(y)$ . Si entonces intercambiamos  $x$  y  $y$ , tenemos  $y = f^{-1}(x)$ , que es la ecuación deseada.

#### CÓMO HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

1. Escriba  $y = f(x)$ .
2. Despeje  $x$  de esta ecuación en términos de  $y$  (si es posible).
3. Intercambie  $x$  y  $y$ . La ecuación resultante es  $y = f^{-1}(x)$ .

En el Ejemplo 6, nótese la forma en que  $f^{-1}$  invierte el efecto de  $f$ . La función  $f$  es la regla “Multiplique por 3, luego reste 2”, mientras que  $f^{-1}$  es la regla “Sume 2, luego divida entre 3”.

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa.

$$\begin{aligned}f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x - 2) \\&= \frac{(3x - 2) + 2}{3} \\&= \frac{3x}{3} = x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x + 2}{3}\right) \\&= 3\left(\frac{x + 2}{3}\right) - 2 \\&= x + 2 - 2 = x\end{aligned}$$

Observe que los Pasos 2 y 3 se pueden invertir. En otras palabras, podemos intercambiar  $x$  y  $y$  primero y luego despejar  $y$  en términos de  $x$ .

### EJEMPLO 6 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función  $f(x) = 3x - 2$ .

**SOLUCIÓN** Primero escribimos  $y = f(x)$ .

$$y = 3x - 2$$

A continuación despejamos  $x$  de esta ecuación.

$$\begin{aligned}3x &= y + 2 && \text{Sume 2} \\x &= \frac{y + 2}{3} && \text{Divida entre 3}\end{aligned}$$

Finalmente, intercambiamos  $x$  y  $y$ .

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es  $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$ .

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 37

**EJEMPLO 7** | Hallar la inversa de una función

En el Ejemplo 7, observe que  $f^{-1}$  invierte el efecto de  $f$ . La función  $f$  es la regla “Tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2”, mientras que  $f^{-1}$  es la regla “Multiplique por 2, sume 3, luego tome la quinta potencia”.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Usamos la Propiedad de la Función Inversa

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) \\ &= \left[2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3\right]^{1/5} \\ &= (x^5 - 3 + 3)^{1/5} \\ &= (x^5)^{1/5} = x \\ f(f^{-1}(x)) &= f((2x + 3)^{1/5}) \\ &= \frac{[(2x + 3)^{1/5}]^5 - 3}{2} \\ &= \frac{2x + 3 - 3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x \quad \checkmark \end{aligned}$$

Las funciones racionales se estudian en la Sección 3.7.

Encuentre la inversa de la función  $f(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$ .

**SOLUCIÓN** Primero escribimos  $y = (x^5 - 3)/2$  y despejamos  $x$ .

$$\begin{array}{ll} y = \frac{x^5 - 3}{2} & \text{Ecuación que define la función} \\ 2y = x^5 - 3 & \text{Multiplique por 2} \\ x^5 = 2y + 3 & \text{Sume 3 (y cambie lados)} \\ x = (2y + 3)^{1/5} & \text{Tome raíz quinta de cada lado} \end{array}$$

A continuación intercambiamos  $x$  y  $y$  para obtener  $y = (2x + 3)^{1/5}$ . Por lo tanto, la función inversa es  $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$ .

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53**

Una **función racional** es una función definida por una expresión racional. En el siguiente ejemplo encontramos la inversa de una función racional.

**EJEMPLO 8** | Hallar la inversa de una función racional

Encuentre la inversa de la función  $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$ .

**SOLUCIÓN** Primero escribimos  $y = (2x + 3)/(x - 1)$  y despejamos  $x$ .

$$\begin{array}{ll} y = \frac{2x + 3}{x - 1} & \text{Ecuación que define la función} \\ y(x - 1) = 2x + 3 & \text{Multiplique por } x - 1 \\ yx - y = 2x + 3 & \text{Desarrolle} \\ yx - 2x = y + 3 & \text{Lleve los términos en } x \text{ al lado izquierdo} \\ x(y - 2) = y + 3 & \text{Factorice } x \\ x = \frac{y + 3}{y - 2} & \text{Divida entre } y - 2 \end{array}$$

Por lo tanto, la función inversa es  $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$ .

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45** **Graficar la inversa de una función**

El principio de intercambiar  $x$  y  $y$  para hallar la función inversa también nos da un método para obtener la gráfica de  $f^{-1}$  a partir de la gráfica de  $f$ . Si  $f(a) = b$ , entonces  $f^{-1}(b) = a$ . Así, el punto  $(a, b)$  está en la gráfica de  $f$  si y sólo si el punto  $(b, a)$  está en la gráfica de  $f^{-1}$ . Pero obtenemos el punto  $(b, a)$  a partir del punto  $(a, b)$  al reflejar en la recta  $y = x$  (vea la Figura 8 en la página siguiente). Por lo tanto, como lo ilustra la Figura 9 de la página siguiente, lo siguiente es verdadero.

La gráfica de  $f^{-1}$  se obtiene al reflejar la gráfica de  $f$  en la recta  $y = x$ .

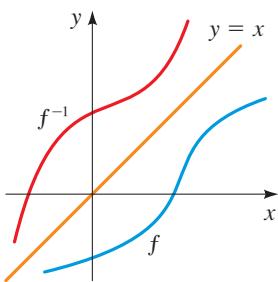


FIGURA 8

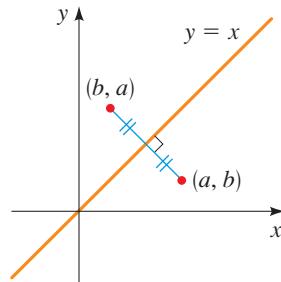


FIGURA 9

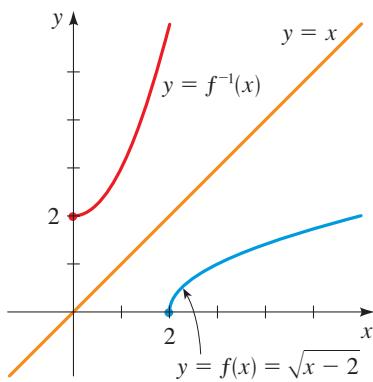


FIGURA 10

### EJEMPLO 9 | Graficar la inversa de una función

- Trace la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x - 2}$ .
- Use la gráfica de  $f$  para trazar la gráfica de  $f^{-1}$ .
- Encuentre la ecuación de  $f^{-1}$ .

#### SOLUCIÓN

- Usando las transformaciones desde la Sección 2.5, trazamos la gráfica de  $y = \sqrt{x - 2}$  al hallar los puntos de la gráfica de la función  $y = \sqrt{x}$  (Ejemplo 1(c) de la Sección 2.2) y moverla a la derecha 2 unidades.
- La gráfica de  $f^{-1}$  se obtiene de la gráfica de  $f$  de la parte (a) al reflejarla en la recta  $y = x$ , como se ve en la Figura 10.
- De la ecuación  $y = \sqrt{x - 2}$  despeje  $x$ , observando que  $y \geq 0$ .

$$\sqrt{x - 2} = y$$

$$x - 2 = y^2$$

Eleva al cuadrado cada uno de los lados

$$x = y^2 + 2 \quad y \geq 0 \quad \text{Sume 2}$$

Intercambie  $x$  y  $y$ :

$$y = x^2 + 2 \quad x \geq 0$$

$$\text{Por lo tanto} \quad f^{-1}(x) = x^2 + 2 \quad x \geq 0$$

Esta expresión muestra que la gráfica de  $f^{-1}$  es la mitad derecha de la parábola  $y = x^2 + 2$  y, de la gráfica mostrada en la Figura 10, esto parece razonable.

#### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 63

## 2.7 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

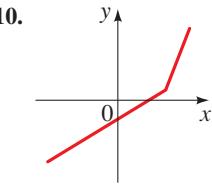
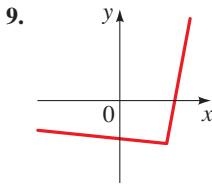
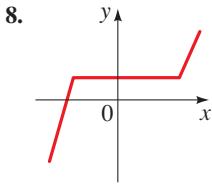
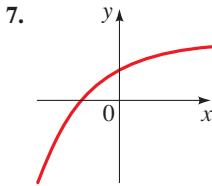
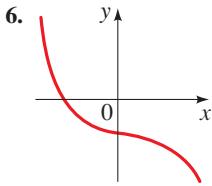
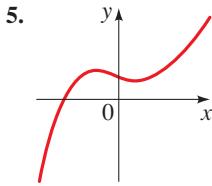
- Una función  $f$  es uno a uno si diferentes entradas producen \_\_\_\_\_ salidas. Se puede saber por la gráfica que una función es uno a uno si se usa la Prueba de la \_\_\_\_\_.
- (a) Para que una función tenga una inversa, debe ser \_\_\_\_\_. Entonces, ¿cuál de las siguientes funciones tiene inversa?  

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3$$
- (b) ¿Cuál es la inversa de la función que usted escogió en la parte (a)?

- Una función  $f$  tiene la siguiente descripción verbal: "Multiplique por 3, sume 5, y luego tome la tercera potencia del resultado".
  - Escriba una descripción verbal para  $f^{-1}$ .
  - Encuentre fórmulas algebraicas que expresen  $f$  y  $f^{-1}$  en términos de la entrada  $x$ .
- ¿Verdadero o falso?
  - Si  $f$  tiene una inversa, entonces  $f^{-1}(x)$  es lo mismo que  $\frac{1}{f(x)}$ .
  - Si  $f$  tiene una inversa, entonces  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

**HABILIDADES**

**5-10** ■ Nos dan la gráfica de una función  $f$ . Determine si  $f$  es uno a uno.



**11-20** ■ Determine si la función es uno a uno.

11.  $f(x) = -2x + 4$

12.  $f(x) = 3x - 2$

13.  $g(x) = \sqrt{x}$

14.  $g(x) = |x|$

15.  $h(x) = x^2 - 2x$

16.  $h(x) = x^3 + 8$

17.  $f(x) = x^4 + 5$

18.  $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \leq x \leq 2$

19.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

20.  $f(x) = \frac{1}{x}$

**21-22** ■ Suponga que  $f$  es una función uno a uno.

21. (a) Si  $f(2) = 7$ , encuentre  $f^{-1}(7)$ .

(b) Si  $f^{-1}(3) = -1$ , encuentre  $f(-1)$ .

22. (a) Si  $f(5) = 18$ , encuentre  $f^{-1}(18)$ .

(b) Si  $f^{-1}(4) = 2$ , encuentre  $f(2)$ .

23. Si  $f(x) = 5 - 2x$ , encuentre  $f^{-1}(3)$ .

24. Si  $g(x) = x^2 + 4x$  con  $x \geq -2$ , encuentre  $g^{-1}(5)$ .

**25-36** ■ Use la Propiedad de la Función Inversa para demostrar que  $f$  y  $g$  son inversas entre sí.

25.  $f(x) = x - 6; \quad g(x) = x + 6$

26.  $f(x) = 3x; \quad g(x) = \frac{x}{3}$

27.  $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \frac{x+5}{2}$

28.  $f(x) = \frac{3-x}{4}; \quad g(x) = 3 - 4x$

29.  $f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{x}$

30.  $f(x) = x^5; \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

31.  $f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0; \quad g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$

32.  $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = (x-1)^{1/3}$

33.  $f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1; \quad g(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad x \neq 0$

34.  $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2; \quad g(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

35.  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}; \quad g(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

36.  $f(x) = \frac{x-5}{3x+4}; \quad g(x) = \frac{5+4x}{1-3x}$

**37-60** ■ Encuentre la función inversa de  $f$ .

37.  $f(x) = 2x + 1$

38.  $f(x) = 6 - x$

39.  $f(x) = 4x + 7$

40.  $f(x) = 3 - 5x$

41.  $f(x) = 5 - 4x^3$

42.  $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$

43.  $f(x) = \frac{1}{x+2}$

44.  $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

45.  $f(x) = \frac{x}{x+4}$

46.  $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

47.  $f(x) = \frac{2x+5}{x-7}$

48.  $f(x) = \frac{4x-2}{3x+1}$

49.  $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$

50.  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

51.  $f(x) = \sqrt{2+5x}$

52.  $f(x) = x^2 + x, \quad x \geq -\frac{1}{2}$

53.  $f(x) = 4 - x^2, \quad x \geq 0$

54.  $f(x) = \sqrt{2x-1}$

55.  $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$

56.  $f(x) = (2-x^3)^5$

57.  $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$

58.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3$

59.  $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

60.  $f(x) = 1 - x^3$

**61-64** ■ Nos dan una función  $f$ . (a) Trace la gráfica de  $f$ . (b) Use la gráfica de  $f$  para trazar la gráfica de  $f^{-1}$ . (c) Encuentre  $f^{-1}$ .

61.  $f(x) = 3x - 6$

62.  $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0$

63.  $f(x) = \sqrt{x+1}$

64.  $f(x) = x^3 - 1$

 **65-70** ■ Trace la gráfica de  $f$  y úsela para determinar si la función es uno a uno.

65.  $f(x) = x^3 - x$

66.  $f(x) = x^3 + x$

67.  $f(x) = \frac{x+12}{x-6}$

68.  $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$

69.  $f(x) = |x| - |x-6|$

70.  $f(x) = x \cdot |x|$



- 71-74** ■ Nos dan una función uno a uno. **(a)** Encuentre la inversa de la función. **(b)** Grafique ambas funciones y su inversa en la misma pantalla para verificar que las gráficas son reflexiones una de la otra en la recta  $y = x$ .

71.  $f(x) = 2 + x$

72.  $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

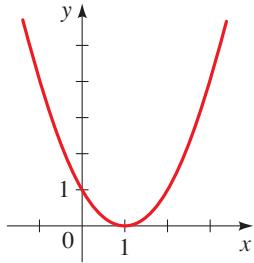
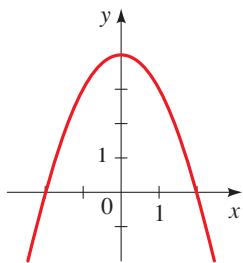
73.  $g(x) = \sqrt{x+3}$

74.  $g(x) = x^2 + 1, x \geq 0$

- 75-78** ■ La función dada no es uno a uno. Restrinja su dominio para que la función resultante sea uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta.)

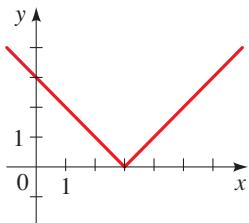
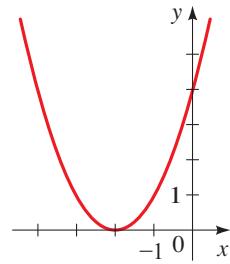
75.  $f(x) = 4 - x^2$

76.  $g(x) = (x - 1)^2$

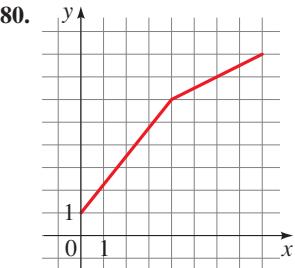
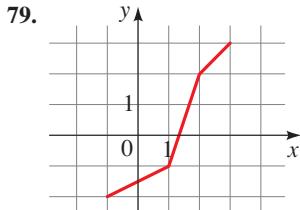


77.  $h(x) = (x + 2)^2$

78.  $k(x) = |x - 3|$



- 79-80** ■ Use la gráfica de  $f$  para trazar la gráfica de  $f^{-1}$ .



## APLICACIONES

- 81. Tarifa por un servicio** Por sus servicios, un investigador privado requiere una tarifa de retención de \$500 más \$80 por hora. Represente con  $x$  el número de horas que el investigador emplea trabajando en un caso.
- (a)** Encuentre una función que modele la tarifa del investigador como función de  $x$ .
- (b)** Encuentre  $f^{-1}$ . ¿Qué representa  $f^{-1}$ ?
- (c)** Encuentre  $f^{-1}(1220)$ . ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 82. Ley de Torricelli** Un tanque contiene 100 galones de agua que se drena por una fuga del fondo y hace que el tanque se vacíe en 40 minutos. La Ley de Torricelli da el volumen del agua restante en el tanque después de  $t$  minutos como

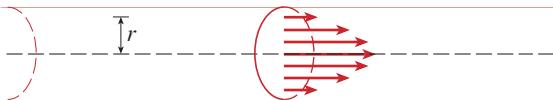
$$V(t) = 100 \left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

- (a)** Encuentre  $V^{-1}$ . ¿Qué representa  $V^{-1}$ ?
- (b)** Encuentre  $V^{-1}(15)$ . ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 83. Circulación sanguínea** Cuando la sangre se mueve en una vena o arteria, su velocidad  $v$  es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que aumenta la distancia  $r$  desde el eje central (vea la figura siguiente). Para una arteria con radio 0.5 cm,  $v$  (en cm/s) está dada como función de  $r$  (en cm)

$$v(r) = 18,500(0.25 - r^2)$$

- (a)** Encuentre  $v^{-1}$ . ¿Qué representa  $v^{-1}$ ?
- (b)** Encuentre  $v^{-1}(30)$ . ¿Qué representa la respuesta de usted?



- 84. Función de demanda** La cantidad de una mercancía que se vende recibe el nombre de *demand* de esa mercancía. La demanda  $D$  de cierta mercancía es función del precio dado por

$$D(p) = -3p + 150$$

- (a)** Encuentre  $D^{-1}$ . ¿Qué representa  $D^{-1}$ ?
- (b)** Encuentre  $D^{-1}(30)$ . ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 85. Escalas de temperatura** La relación entre las escalas Fahrenheit ( $F$ ) y Celsius ( $C$ ) está dada por

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

- (a)** Encuentre  $F^{-1}$ . ¿Qué representa  $F^{-1}$ ?
- (b)** Encuentre  $F^{-1}(86)$ . ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 86. Tasas de cambio** El valor relativo de las monedas en circulación fluctúa a diario. Cuando este problema se escribió, un dólar canadiense valía 1.0573 dólares de Estados Unidos.

- (a)** Encuentre una función  $f$  que dé el valor del dólar de Estados Unidos  $f(x)$  de  $x$  dólares canadienses.
- (b)** Encuentre  $f^{-1}$ . ¿Qué representa  $f^{-1}$ ?
- (c)** ¿Cuánto dinero canadiense valdrían \$12,250 en dólares de Estados Unidos?

- 87. Impuesto sobre la renta** En cierto país, el impuesto sobre ingresos iguales o menores a €20,000 es 10%. Para ingresos mayores a €20,000, el impuesto es €2000 más 20% de la cantidad que pase de €20,000.

- (a)** Encuentre una función  $f$  que dé el impuesto sobre la renta en un ingreso  $x$ . Exprese  $f$  como función definida por tramos.
- (b)** Encuentre  $f^{-1}$ . ¿Qué representa  $f^{-1}$ ?
- (c)** ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de €10,000?

- 88. Descuentos múltiples** Un distribuidor de autos anuncia un 15% de descuento en todos sus autos nuevos. Además, el fabricante ofrece un descuento de \$1000 en la compra de un auto nuevo. Con  $x$  represente el precio de etiqueta del auto.

- (a)** Suponga que aplica sólo el 15% de descuento. Encuentre una función  $f$  que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta  $x$ .

- (b) Suponga que aplica sólo el descuento de \$1000. Encuentre una función  $g$  que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta  $x$ .
- (c) Encuentre una fórmula para  $H = f \circ g$ .
- (d) Encuentre  $H^{-1}$ . ¿Qué representa  $H^{-1}$ ?
- (e) Encuentre  $H^{-1}(13,000)$ . ¿Qué representa la respuesta de usted?
- 89. Costo de una pizza** Marcello's Pizza cobra un precio base de \$7 por una pizza grande más \$2 por cada aderezo o guarnición. Así, si una persona ordena una pizza grande con  $x$  aderezos, el precio de su pizza está dado por la función  $f(x) = 7 + 2x$ . Encuentre  $f^{-1}$ . ¿Qué representa la función  $f^{-1}$ ?

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

### 90. Determinar cuándo una función lineal tiene inversa

Para que la función lineal  $f(x) = mx + b$  sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto acerca de su pendiente? Si es uno a uno, encuentre su inversa. ¿La inversa es lineal? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

### 91. Hallar una inversa “mentalmente”

En las notas al margen de esta sección señalamos que se puede hallar la inversa de una función con sólo invertir las operaciones que forman la función. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 vimos que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \quad \text{es} \quad f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$$

porque la “inversa” de “Multiplique por 3 y reste 2” es “Sume 2 y divida entre 3”. Use el mismo procedimiento para hallar la inversa de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x) = \frac{2x + 1}{5} & \text{(b)} \quad f(x) = 3 - \frac{1}{x} \\ \text{(c)} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2} & \text{(d)} \quad f(x) = (2x - 5)^3 \end{array}$$

Ahora considere otra función:

$$f(x) = x^3 + 2x + 6$$

¿Es posible usar la misma clase de inversión simple de operaciones para hallar la inversa de esta función? Si es así, hágalo. Si no, explique qué es diferente acerca de esta función que hace difícil este trabajo.

### 92. La función identidad

La función  $f(x) = x$  se denomina **función identidad**. Demuestre que para cualquier función  $f$  tenemos  $f \circ I = f$ ,  $I \circ f = f$  y  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ . (Esto significa que la función identidad  $I$  se comporta para funciones y composición igual que el número 1 se comporta para números reales y multiplicación.)

### 93. Despejar una función incógnita de una ecuación

En el Ejercicio 69 de la Sección 2.6 se pidió al estudiante resolviera ecuaciones en las que las incógnitas eran funciones. Ahora que ya sabemos de inversas y la función identidad (vea Ejercicio 92), podemos usar álgebra para resolver esas ecuaciones. Por ejemplo, para despejar la función incógnita  $f$  de  $f \circ g = h$ , efectuamos los siguientes pasos:

$f \circ g = h$ $f \circ g \circ g^{-1} = h \circ g^{-1}$ $f \circ I = h \circ g^{-1}$ $f = h \circ g^{-1}$	<b>Problema: despejar <math>f</math></b> <b>Componer con <math>g^{-1}</math> en la derecha</b> <b>Porque <math>g \circ g^{-1} = I</math></b> <b>Porque <math>f \circ I = f</math></b>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Entonces la solución es  $f = h \circ g^{-1}$ . Use esta técnica para despejar la función desconocida indicada de la ecuación  $f \circ g = h$ .

- (a) Despeje  $f$ , donde  $g(x) = 2x + 1$  y  $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$ .
- (b) Despeje  $y$ , donde  $f(x) = 3x + 5$  y  $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$ .

## CAPÍTULO 2 | REPASO

### ■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

- Defina verbalmente cada concepto. (Verifique consultando la definición del texto.)
  - Función
  - Dominio y rango de una función
  - Gráfica de una función
  - Variables independientes y dependientes
- Trace manualmente, en los mismos ejes, las gráficas de las siguientes funciones.
  - $f(x) = x$
  - $g(x) = x^2$
  - $h(x) = x^3$
  - $j(x) = x^4$
- (a) Exprese la Prueba de la Recta Vertical.  
(b) Exprese la Prueba de la Recta Horizontal.
- ¿Cómo se define la rapidez de cambio promedio de la función  $f$  entre dos puntos?
- ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez de cambio promedio de una función lineal?
- Defina verbalmente cada concepto.
  - Función creciente
  - Función decreciente
  - Función constante
- Suponga que nos dan la gráfica de  $f$ . Escriba una ecuación para cada gráfica que se obtenga de la gráfica de  $f$  como sigue.
  - Desplazar 3 unidades hacia arriba.
  - Desplazar 3 unidades hacia abajo.
  - Desplazar 3 unidades a la derecha.
  - Desplazar 3 unidades a la izquierda.
  - Reflejar en el eje  $x$ .
  - Reflejar en el eje  $y$ .
  - Contraer verticalmente en un factor de 3.
  - Contraer verticalmente en un factor de  $\frac{1}{3}$ .
  - Alargar verticalmente en un factor de 2.
  - Alargar verticalmente en un factor de  $\frac{1}{2}$ .

8. (a) ¿Qué es una función par? ¿Qué simetría posee esta gráfica? Dé un ejemplo de una función par.  
 (b) ¿Qué es una función impar? ¿Qué simetría posee esta gráfica? Dé un ejemplo de una función par.
9. ¿Qué significa decir que  $f(3)$  es un valor máximo local de  $f$ ?
10. Suponga que  $f$  tiene dominio  $A$  y  $g$  tiene dominio  $B$ .  
 (a) ¿Cuál es el dominio de  $f + g$ ?  
 (b) ¿Cuál es el dominio de  $fg$ ?  
 (c) ¿Cuál es el dominio de  $f/g$ ?

## EJERCICIOS

- 1-2 ■ Nos dan una descripción verbal de una función  $f$ . Encuentre una fórmula que exprese  $f$  en notación de funciones.

1. “Elevar al cuadrado, luego restar 5.”

2. “Dividir entre 2, luego sumar 9.”

- 3-4 ■ Nos dan una fórmula para una función  $f$ . Dé una descripción verbal de la función.

3.  $f(x) = 3(x + 10)$

4.  $f(x) = \sqrt{6x - 10}$

- 5-6 ■ Complete la tabla de valores para la función dada.

5.  $g(x) = x^2 - 4x$

$x$	$g(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

6.  $h(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$x$	$h(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

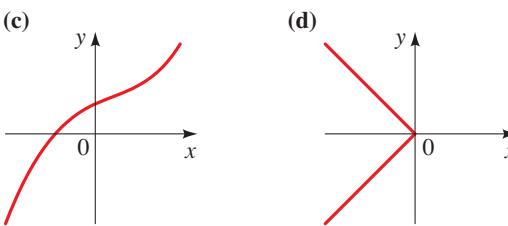
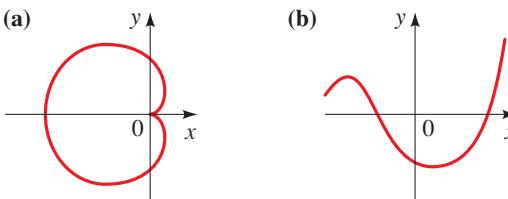
7. Un editor estima que el costo  $C(x)$  de imprimir una serie de  $x$  ejemplares de cierto libro de texto de matemáticas está dado por la función  $C(x) = 5000 + 30x - 0.001x^2$ .

- (a) Encuentre  $C(1000)$  y  $C(10,000)$ .  
 (b) ¿Qué representan las respuestas de usted en la parte (a)?  
 (c) Encuentre  $C(0)$ . ¿Qué representa este número?  
 (d) Reynalda trabaja como vendedora en el departamento de electrónica de una tienda departamental. Ella gana un salario semanal fijo más una comisión basada en el precio al menudeo de los artículos que vende. Si vende mercancía con valor de  $x$  dólares, su ganancia de la semana está dada por la función  $E(x) = 400 + 0.03x$ . Encuentre  $E(2000)$  y  $E(15,000)$ .  
 (e) Encuentre  $E(2000)$  y  $E(15,000)$ .  
 (f) ¿Qué representan las respuestas de usted en la parte (a)?  
 (g) Encuentre  $E(0)$ . ¿Qué representa este número?  
 (h) De la fórmula para  $E$ , determine qué porcentaje gana Reynalda sobre los artículos que vende.  
 (i) Si  $f(x) = x^2 - 4x + 6$ , encuentre  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(a)$ ,  $f(-a)$ ,  $f(x+1)$ ,  $f(2x)$ , y  $2f(x) - 2$ .  
 (j) Si  $f(x) = 4 - \sqrt{3x - 6}$ , encuentre  $f(5)$ ,  $f(9)$ ,  $f(a+2)$ ,  $f(-x)$ ,  $f(x^2)$ , y  $[f(x)]^2$ .

11. ¿Cómo está definida la función compuesta  $f \circ g$ ?

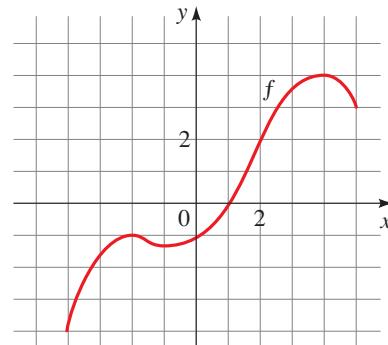
12. (a) ¿Qué es una función uno a uno?  
 (b) ¿Cómo se puede saber de la gráfica de una función si es uno a uno?  
 (c) Suponga que  $f$  es uno a uno con dominio  $A$  y rango  $B$ . ¿Cómo está definida la función inversa  $f^{-1}$ ? ¿Cuál es el dominio de  $f^{-1}$ ? ¿Cuál es el rango de  $f^{-1}$ ?  
 (d) Si nos dan una fórmula para  $f$ , ¿cómo encontramos una fórmula para  $f^{-1}$ ?  
 (e) Si nos dan la gráfica de  $f$ , ¿cómo encontramos la gráfica de  $f^{-1}$ ?

11. ¿Cuáles de las siguientes figuras son gráficas de funciones?  
 ¿Cuáles de las funciones son uno a uno?



12. Nos dan la gráfica de una función  $f$ .

- (a) Encuentre  $f(-2)$  y  $f(2)$ .  
 (b) Encuentre el dominio de  $f$ .  
 (c) Encuentre el rango de  $f$ .  
 (d) ¿En qué intervalos es  $f$  creciente? ¿En qué intervalos es  $f$  decreciente?  
 (e) ¿Cuáles son los valores máximos locales de  $f$ ?  
 (f) ¿ $f$  es uno a uno?



- 13-14 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

13.  $f(x) = \sqrt{x+3}$

14.  $F(t) = t^2 + 2t + 5$

**15-22** ■ Encuentre el dominio de la función.

15.  $f(x) = 7x + 15$

16.  $f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$

17.  $f(x) = \sqrt{x + 4}$

18.  $f(x) = 3x - \frac{2}{\sqrt{x + 1}}$

19.  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2}$

20.  $g(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$

21.  $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

22.  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x + 1}}{\sqrt[3]{2x + 2}}$

**23-40** ■ Trace la gráfica de la función.

23.  $f(x) = 1 - 2x$

24.  $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)$ ,  $2 \leq x \leq 8$

25.  $f(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$

26.  $g(t) = t^2 - 2t$

27.  $f(x) = x^2 - 6x + 6$

28.  $f(x) = 3 - 8x - 2x^2$

29.  $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

30.  $g(x) = -|x|$

31.  $h(x) = \frac{1}{2}x^3$

32.  $h(x) = \sqrt{x + 3}$

33.  $h(x) = \sqrt[3]{x}$

34.  $H(x) = x^3 - 3x^2$

35.  $g(x) = \frac{1}{x^2}$

36.  $G(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}$

37.  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

38.  $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

39.  $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

40.  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

**41-44** ■ Determine si la ecuación define a  $y$  como una función de  $x$ .

41.  $x + y^2 = 14$

42.  $3x - \sqrt{y} = 8$

43.  $x^3 - y^3 = 27$

44.  $2x = y^4 - 16$

**45.** Determine cuál rectángulo de vista produce la gráfica más apropiada de la función

$$f(x) = 6x^3 - 15x^2 + 4x - 1$$

- (i)  $[-2, 2]$  por  $[-2, 2]$  (ii)  $[-8, 8]$  por  $[-8, 8]$   
 (iii)  $[-4, 4]$  por  $[-12, 12]$  (iv)  $[-100, 100]$  por  $[-100, 100]$

**46.** Determine cuál rectángulo de vista produce la gráfica más apropiada de la función  $f(x) = \sqrt{100 - x^3}$

- (i)  $[-4, 4]$  por  $[-4, 4]$   
 (ii)  $[-10, 10]$  por  $[-10, 10]$   
 (iii)  $[-10, 10]$  por  $[-10, 40]$   
 (iv)  $[-100, 100]$  por  $[-100, 100]$

**47-50** ■ Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado.

47.  $f(x) = x^2 + 25x + 173$

48.  $f(x) = 1.1x^3 - 9.6x^2 - 1.4x + 3.2$

49.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$

50.  $f(x) = |x(x + 2)(x + 4)|$



51. Encuentre, aproximadamente, el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$$



52. Encuentre, aproximadamente, el rango de la función

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 6$$



53-54 ■ Trace la gráfica de la función  $f$ , y determine los intervalos en los que  $f$  es creciente y en los que es decreciente.

53.  $f(x) = x^3 - 4x^2$

54.  $f(x) = |x^4 - 16|$

55-58 ■ Encuentre la rapidez de cambio promedio de la función entre los puntos dados.

55.  $f(x) = x^2 + 3x$ ;  $x = 0, x = 2$

56.  $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ ;  $x = 4, x = 8$

57.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $x = 3, x = 3 + h$

58.  $f(x) = (x + 1)^2$ ;  $x = a, x = a + h$

59. La población de una comunidad planeada a orillas del mar en Florida está dada por la función  $P(t) = 3000 + 200t + 0.1r^2$ , donde  $t$  representa el número de años desde que la comunidad fue incorporada en 1985.

- (a) Encuentre  $P(10)$  y  $P(20)$ . ¿Qué representan estos valores?  
 (b) Encuentre la rapidez de cambio promedio de  $P$  entre  $t = 10$  y  $t = 20$ . ¿Qué representa este número?

60. Ella está ahorrando para su retiro, haciendo depósitos regulares en un plan 401(k). Cuando aumenta su salario, encuentra que puede depositar cantidades crecientes cada año. Entre 1995 y 2008, la cantidad anual (en dólares) que depositó estuvo dada por la función  $D(t) = 3500 + 15t^2$ , donde  $t$  representa el año del depósito medido desde el principio del plan (entonces, 1995 corresponde a  $t = 0$  y 1996 corresponde a  $t = 1$ , y así sucesivamente).

- (a) Encuentre  $D(0)$  y  $D(15)$ . ¿Qué representan estos valores?  
 (b) Suponiendo que sus depósitos continúan siendo modelados por la función  $D$ , ¿en qué año habrá depositado \$17,000?  
 (c) Encuentre la rapidez de cambio promedio de  $D$  entre  $t = 0$  y  $t = 15$ . ¿Qué representa este número?

61-62 ■ Nos dan una función  $f$ . (a) Encuentre la rapidez de cambio promedio de  $f$  entre  $x = 0$  y  $x = 2$ , y la rapidez de cambio promedio de  $f$  entre  $x = 15$  y  $x = 50$ . (b) ¿Son iguales las dos rapidez de cambio promedios que encontró usted en la parte (a)? Explique por qué sí o por qué no.

61.  $f(x) = \frac{1}{2}x - 6$

62.  $f(x) = 8 - 3x$

63. Suponga que nos dan la gráfica de  $f$ . Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las siguientes funciones a partir de la gráfica de  $f$ .

(a)  $y = f(x) + 8$

(b)  $y = f(x + 8)$

(c)  $y = 1 + 2f(x)$

(d)  $y = f(x - 2) - 2$

(e)  $y = f(-x)$

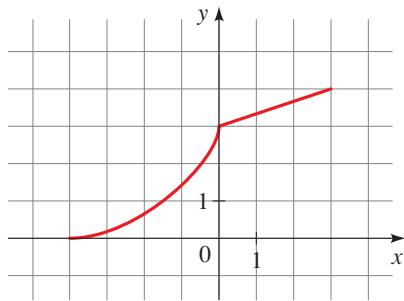
(f)  $y = -f(-x)$

(g)  $y = -f(x)$

(h)  $y = f^{-1}(x)$

64. Nos dan la gráfica de  $f$ . Trace las gráficas de las siguientes funciones.

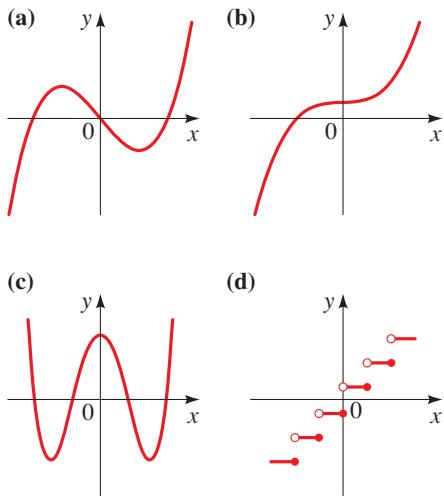
- (a)  $y = f(x - 2)$  (b)  $y = -f(x)$   
 (c)  $y = 3 - f(x)$  (d)  $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$   
 (e)  $y = f^{-1}(x)$  (f)  $y = f(-x)$



65. Determine si  $f$  es par, impar, o ninguna de éstas.

- (a)  $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$  (b)  $f(x) = x^3 - x^7$   
 (c)  $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$  (d)  $f(x) = \frac{1}{x + 2}$

66. Determine si la función de la figura es par, impar, o ninguna de éstas.



67. Encuentre el mínimo valor de la función  $g(x) = 2x^2 + 4x - 5$ .  
 68. Encuentre el máximo valor de la función  $f(x) = 1 - x - x^2$ .  
 69. Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra verticalmente hacia arriba. Su altura (en pies) arriba del suelo después de  $t$  segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 48t + 32$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

70. La utilidad  $P$  (en dólares) generada por vender  $x$  unidades de cierta mercancía está dada por

$$P = -1500 + 12x - 0.0004x^2$$

¿Cuál es la máxima utilidad, y cuántas unidades deben ser vendidas para generarla?



- 71-72 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y los valores de  $x$  en los que se presentan. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

71.  $f(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$  72.  $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

- 73-74 ■ Nos dan dos funciones,  $f$  y  $g$ . Trace gráficas de  $f$ ,  $g$  y  $f + g$  en la misma pantalla de una calculadora graficadora para ilustrar el concepto de adición gráfica.

73.  $f(x) = x + 2$ ,  $g(x) = x^2$

74.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = 3 - x^2$

75. Si  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  y  $g(x) = 4 - 3x$ , encuentre las siguientes funciones.

- (a)  $f + g$  (b)  $f - g$  (c)  $fg$   
 (d)  $f/g$  (e)  $f \circ g$  (f)  $g \circ f$

76. Si  $f(x) = 1 + x^2$  y  $g(x) = \sqrt{x - 1}$ , encuentre lo siguiente.

- (a)  $f \circ g$  (b)  $g \circ f$  (c)  $(f \circ g)(2)$   
 (d)  $(f \circ f)(2)$  (e)  $f \circ g \circ f$  (f)  $g \circ f \circ g$

- 77-78 ■ Encuentre las funciones  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$  y sus dominios.

77.  $f(x) = 3x - 1$ ,  $g(x) = 2x - x^2$

78.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{2}{x - 4}$

79. Encuentre  $f \circ g \circ h$ , donde  $f(x) = \sqrt{1 - x}$ ,  $g(x) = 1 - x^2$ , y  $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ .

80. Si  $T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$ , encuentre funciones  $f$ ,  $g$ , y  $h$  tales que  $f \circ g \circ h = T$ .

- 81-86 ■ Determine si la función es uno a uno.

81.  $f(x) = 3 + x^3$

82.  $g(x) = 2 - 2x + x^2$

83.  $h(x) = \frac{1}{x^4}$

84.  $r(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$

85.  $p(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$

86.  $q(x) = 3.3 + 1.6x + 2.5x^3$

- 87-90 ■ Encuentre la inversa de la función.

87.  $f(x) = 3x - 2$  88.  $f(x) = \frac{2x + 1}{3}$

89.  $f(x) = (x + 1)^3$  90.  $f(x) = 1 + \sqrt[5]{x - 2}$

91. (a) Trace la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 4 \quad x \geq 0$$

- (b) Use la parte (a) para trazar la gráfica de  $f^{-1}$ .

- (c) Encuentre una ecuación para  $f^{-1}$ .

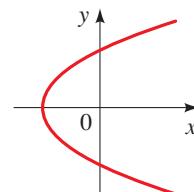
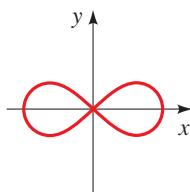
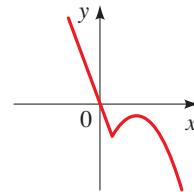
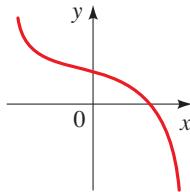
92. (a) Demuestre que la función de  $f(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$  es uno a uno.

- (b) Trace la gráfica de  $f$ .

- (c) Use la parte (b) para trazar la gráfica de  $f^{-1}$ .

- (d) Encuentre una ecuación para  $f^{-1}$ .

1. ¿Cuáles de las siguientes gráficas son funciones? Si la gráfica es la de una función, ¿es uno a uno?



2. Sea  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ .

  - Evalúe  $f(3)$ ,  $f(5)$  y  $f(a-1)$ .
  - Encuentre el dominio de  $f$ .

3. Una función tiene la siguiente descripción verbal: "Restar 2, luego elevar al cubo el resultado."

  - Encuentre una fórmula que exprese  $f$  algebraicamente.
  - Haga una tabla de valores de  $f$ , para las entradas  $-1, 0, 1, 2, 3$  y  $4$ .
  - Trace una gráfica de  $f$ , usando la tabla de valores de la parte (b) para ayudarse.
  - ¿Cómo sabemos que  $f$  tiene una inversa? Dé una descripción verbal para  $f^{-1}$ .
  - Encuentre una fórmula que exprese  $f^{-1}$  algebraicamente.

4. Un grupo de personas que recaudan fondos para una escuela vende barras de chocolate para ayudar a financiar una piscina para su programa de educación física. El grupo encuentra que cuando fijan el precio de  $x$  dólares por barra (donde  $0 < x \leq 5$ ), el ingreso total por sus ventas (en dólares) está dado por la función  $R(x) = -500x^2 + 3000x$ .

  - Evalúe  $R(2)$  y  $R(4)$ . ¿Qué representan estos valores?
  - Use calculadora graficadora para graficar  $R$ . ¿Qué le dice la gráfica acerca de lo que ocurre al ingreso cuando aumenta el precio de  $0$  a  $5$  dólares?
  - ¿Cuál es el máximo ingreso, y a qué precio se obtiene?

5. Determine la rapidez de cambio promedio para la función  $f(t) = t^2 - 2t$  entre  $t = 2$  y  $t = 5$ .

6. (a) Trace la gráfica de la función  $f(x) = x^3$ .  
(b) Use la parte (a) para graficar la función  $g(x) = (x-1)^3 - 2$ .

7. (a) ¿Cómo se obtiene la gráfica de  $y = f(x-3) + 2$  a partir de la gráfica de  $f$ ?  
(b) ¿Cómo se obtiene la gráfica de  $y = f(-x)$  a partir de la gráfica de  $f$ ?

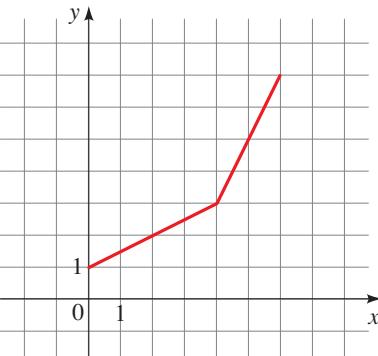
8. Sea  $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

  - Evalúe  $f(-2)$  y  $f(1)$ .
  - Trace la gráfica de  $f$ .

9. Si  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = x - 3$ , encuentre lo siguiente.

  - $f \circ g$
  - $g \circ f$
  - $f(g(2))$
  - $g(f(2))$
  - $g \circ g \circ g$

10. (a) Si  $f(x) = \sqrt{3 - x}$ , encuentre la función inversa  $f^{-1}$ .  
 (b) Trace las gráficas de  $f$  y  $f^{-1}$  en los mismos ejes de coordenadas.
11. Nos dan la gráfica de una función  $f$ .  
 (a) Encuentre el dominio y rango de  $f$ .  
 (b) Trace la gráfica de  $f^{-1}$ .  
 (c) Encuentre la rapidez de cambio promedio de  $f$  entre  $x = 2$  y  $x = 6$ .



12. Sea  $f(x) = 3x^4 - 14x^2 + 5x - 3$ .  
 (a) Trace la gráfica de  $f$  en un rectángulo de vista apropiado.  
 (b) ¿ $f$  es uno a uno?  
 (c) Encuentre los valores máximo y mínimo locales de  $f$  y los valores de  $x$  en los que se presentan. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.  
 (d) Use la gráfica para determinar el rango de  $f$ .  
 (e) Encuentre los intervalos en los que  $f$  es creciente y en los que  $f$  es decreciente.

Muchos de los procesos que se estudian en ciencias físicas y sociales se relacionan con entender la forma en que una cantidad varía con respecto de otra. Hallar una función que describa la dependencia de una cantidad, respecto de otra, se conoce como *modelado*. Por ejemplo, un biólogo observa que el número de bacterias en cierto cultivo aumenta con el tiempo. Él trata de modelar este fenómeno al hallar la función (o regla) precisa que relacione la población de bacterias con el tiempo transcurrido.

En este *Enfoque* aprenderemos a hallar modelos que se puedan construir usando propiedades geométricas o algebraicas del objeto en estudio. Una vez hallado el modelo, lo usaremos para analizar y predecir propiedades del objeto o proceso en estudio.

## ▼ Modelado con funciones

Empezamos con una situación práctica que ilustra el proceso de modelado.

### EJEMPLO 1 | Modelar el volumen de una caja

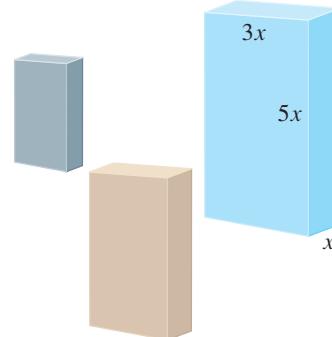
Una compañía productora de cereales para desayuno fabrica cajas para envasar sus productos. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: su ancho es el triple de su profundidad, y su altura es 5 veces su profundidad.

- (a) Encuentre una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.
- (b) Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulg.
- (c) ¿Para qué profundidad tendrá un volumen de 90 pulg<sup>3</sup>?
- (d) ¿Para qué profundidad tendrá un volumen mayor a 60 pulg<sup>3</sup>?

### CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Experimentemos con el problema. Si la profundidad es 1 pulgada, entonces el ancho es 3 pulgadas y la altura es 5 pulgadas. Por lo tanto, en este caso, el volumen es  $V = 1 \times 3 \times 5 = 15$  pulg<sup>3</sup>. La tabla da otros valores. Observe que todas las cajas tienen la misma forma, y a mayor profundidad, mayor volumen.

Profundidad	Volumen
1	$1 \times 3 \times 5 = 15$
2	$2 \times 6 \times 10 = 120$
3	$3 \times 9 \times 15 = 405$
4	$4 \times 12 \times 20 = 96$



### SOLUCIÓN

- (a) Para hallar la función que modele el volumen de la caja, usamos los siguientes pasos.

### ► Expresar verbalmente el volumen

Sabemos que el volumen de una caja rectangular es

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

### ► Escoger la variable

Hay tres cantidades que varían: ancho, profundidad y altura. Como la función que buscamos depende de la profundidad, hacemos

$$x = \text{profundidad de la caja}$$

Entonces, expresamos las otras dimensiones de la caja en términos de  $x$ .

Verbalmente	En álgebra
Profundidad	$x$
Ancho	$3x$
Altura	$5x$

### ► Establecer el modelo

El modelo es la función  $V$  que da el volumen de la caja en términos de la profundidad  $x$ .

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$V(x) = x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$V(x) = 15x^3$$

El volumen de la caja está modelado por la función  $V(x) = 15x^3$ . La función  $V$  está graficada en la Figura 1.

### ► Usar el modelo

Usamos el modelo para contestar las preguntas de las partes (b), (c) y (d).

(b) Si la profundidad es 1.5 pulg., el volumen es  $V(1.5) = 15(1.5)^3 = 50.625$  pulg.<sup>3</sup>.

(c) Necesitamos resolver la ecuación  $V(x) = 90$ , es decir,

$$15x^3 = 90$$

$$x^3 = 6$$

$$x = \sqrt[3]{6} \approx 1.82 \text{ pulgadas}$$

El volumen es 90 pulg.<sup>3</sup> cuando la profundidad es alrededor de 1.82 pulgadas. (También podemos resolver gráficamente esta ecuación, como se ve en la Figura 2.)

(d) Necesitamos resolver la desigualdad  $V(x) \geq 60$ , es decir,

$$15x^3 \geq 60$$

$$x^3 \geq 4$$

$$x \geq \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

El volumen será mayor de 60 pulg.<sup>3</sup> si la profundidad es mayor a 1.59 pulgadas. (También podemos resolver gráficamente esta desigualdad, como se ve en la Figura 3.)

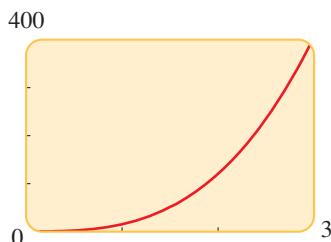


FIGURA 1

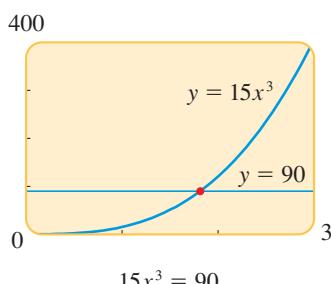


FIGURA 2

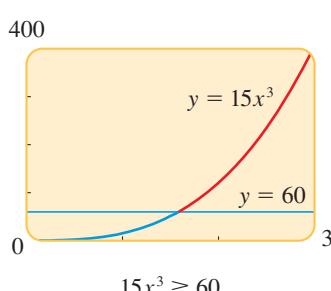


FIGURA 3

Los pasos del Ejemplo 1 son característicos de cómo modelamos con funciones. Están resumidos en el recuadro siguiente.

### GUÍA PARA MODELAR CON FUNCIONES

- 1. Expresar verbalmente el problema.** Identificar la cantidad que se desea modelar y expresarla, verbalmente, como función de las otras cantidades del problema.
- 2. Escoger la variable.** Identificar todas las variables que se usan para expresar la función del Paso 1. Asignar un símbolo, por ejemplo  $x$ , a una variable, y expresar las otras variables en términos de este símbolo.
- 3. Establecer el modelo.** Expresar la función en el lenguaje de álgebra al escribirla como función de la variable única escogida en el Paso 2.
- 4. Usar el modelo.** Usar la función para contestar las preguntas planteadas en el problema. (Para hallar un máximo o un mínimo, usar los métodos descritos en la Sección 3.3.)

### EJEMPLO 2 | Instalar una cerca en un jardín

Una jardinera tiene 140 pies de malla para instalar una cerca en un jardín rectangular de hortalizas.

- Encuentre una función que modele el área del jardín que ella pueda cercar.
- ¿Para qué rango de anchos el área es mayor a 825 pies<sup>2</sup>?
- ¿Puede ella cercar un jardín con área de 1250 pies<sup>2</sup>?
- Encuentre las dimensiones del área más grande que ella pueda cercar.

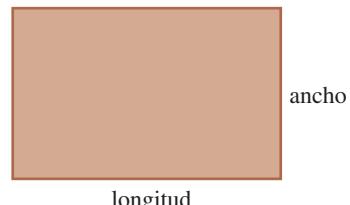
### CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Si la jardinera instala una cerca alrededor de un lote con 10 pies, entonces la longitud debe ser 60 pies, porque  $10 + 10 + 60 + 60 = 140$ . Entonces, el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{largo} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

La tabla siguiente muestra varias opciones para cercar el jardín. Vemos que cuando aumenta el ancho, aumenta el área cercada y luego disminuye.

Ancho	Longitud	Área
10	60	600
20	50	1000
30	40	1200
40	30	1200
50	20	1000
60	10	600



### SOLUCIÓN

- El modelo que buscamos es una función que da el área que ella pueda cercar.

#### ► Expresar verbalmente el problema

Sabemos que el área del jardín rectangular es

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{longitud}$$

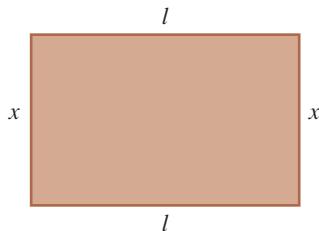


FIGURA 4

### ► Escoger la variable

Hay dos cantidades que varían: ancho y longitud. Como la función que buscamos depende sólo de una variable, hacemos

$$x = \text{ancho del jardín}$$

Entonces debemos expresar la longitud en términos de  $x$ . El perímetro se fija en 140 pies, de modo que la longitud está determinada una vez que escogamos el ancho. Si hacemos que la longitud sea  $l$ , como en la Figura 4, entonces  $2x + 2l = 140$ , de modo que  $l = 70 - x$ . Resumimos estos datos.

Verbalmente	En álgebra
Ancho	$x$
Longitud	$70 - x$

### ► Establecer el modelo

El modelo es la función  $A$  que da el área del jardín para cualquier ancho  $x$ .

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{longitud}$$

$$A(x) = x(70 - x)$$

$$A(x) = 70x - x^2$$

El área que ella puede cercar está modelada por la función  $A(x) = 70x - x^2$ .

### ► Usar el modelo

Usamos el modelo para contestar las preguntas de las partes (b)–(d).

- Necesitamos resolver la desigualdad  $A(x) \geq 825$ . Para resolver gráficamente, graficamos  $y = 70x - x^2$  y  $y = 825$  en el mismo rectángulo de vista (vea Figura 5). Vemos que  $15 \leq x \leq 55$ .
- De la Figura 6 vemos que la gráfica de  $A(x)$  siempre está debajo de la recta  $y = 1250$ , de modo que nunca se alcanza un área de 1250 pies<sup>2</sup>.
- Necesitamos hallar en dónde se presenta el máximo valor de la función  $A(x) = 70x - x^2$ . La función está graficada en la Figura 7. Usando la función **TRACE** de una calculadora graficadora, hallamos que la función alcanza su valor máximo en  $x = 35$ . Entonces, el área máxima que ella puede cercar es aquella cuando el ancho del jardín es 35 pies y su longitud es  $70 - 35 = 35$  pies. El área máxima entonces es  $35 \times 35 = 1225$  pies<sup>2</sup>.

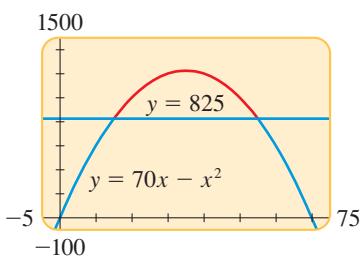


FIGURA 5

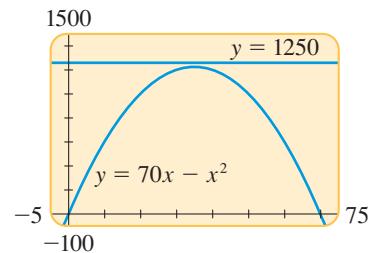


FIGURA 6

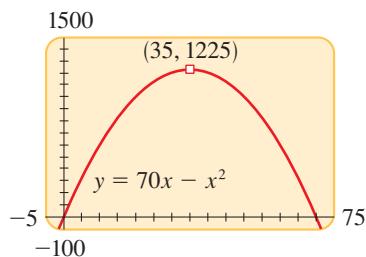


FIGURA 7

Los valores máximos de funciones se estudian en la página 166.

### EJEMPLO 3 | Reducir al mínimo el metal de una lata

Un fabricante hace una lata que contiene 1 L (litro) de aceite. ¿Qué radio reduce al mínimo la cantidad de metal de la lata?

#### CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Para usar la cantidad mínima de metal, debemos reducir al mínimo el área superficial de la lata, es decir, el área de la tapa, fondo y costados. El área de la tapa y fondo es  $2\pi r^2$  y el área de los costados es  $2\pi rh$  (vea Figura 8), de modo que el área superficial de la lata es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

El radio y altura de la lata se pueden escoger de modo que el volumen sea exactamente 1 L, o 1000 cm<sup>3</sup>. Si buscamos un radio pequeño, por ejemplo  $r = 3$ , entonces la altura debe ser precisamente de la altura suficiente para hacer que el volumen total sea 1000 cm<sup>3</sup>. En otras palabras, debemos tener

$$\pi(3)^2h = 1000 \quad \text{El volumen de la lata es } \pi r^2h$$

$$h = \frac{1000}{9\pi} \approx 35.4 \text{ cm} \quad \text{Despeje } h$$

Ahora que sabemos el radio y la altura, podemos hallar el área superficial de la lata:

$$\text{área superficial} = 2\pi(3)^2 + 2\pi(3)(35.4) \approx 723.8 \text{ cm}^3$$

Si buscamos un radio diferente, podemos hallar la correspondiente altura y área superficial en una forma similar.

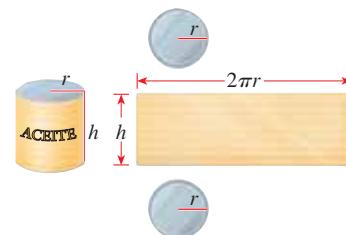


FIGURA 8

**SOLUCIÓN** El modelo que buscamos es una función que da el área superficial de la lata.

#### ► Expresar verbalmente el modelo

Sabemos que para una lata cilíndrica

$$\text{área superficial} = \text{área de tapa y fondo} + \text{área costados}$$

#### ► Escoger la variable

Hay dos cantidades que varían: radio y altura. Como la función que buscamos depende del radio, hacemos

$$r = \text{radio de la lata}$$

A continuación, debemos expresar la altura en términos de  $r$ . Como el volumen de una lata cilíndrica es  $V = \pi r^2 h$  y el volumen debe ser 1000 cm<sup>3</sup>, tenemos

$$\pi r^2 h = 1000 \quad \text{El volumen de la lata es } 1000 \text{ cm}^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad \text{Despeje } h$$

Ahora podemos expresar el área de la tapa, fondo y costados en términos sólo de  $r$ .

Verbalmente	En álgebra
Radio de la lata	$r$
Altura de la lata	$\frac{1000}{\pi r^2}$
Área de tapa y fondo	$2\pi r^2$
Área de costados ( $2\pi rh$ )	$2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$

### ► Establecer el modelo

El modelo es la función  $S$  que da el área superficial de la lata como función del radio  $r$ .

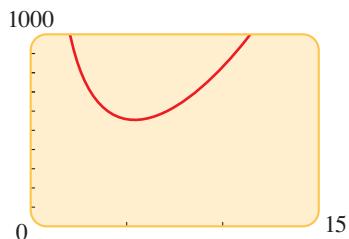
$$\text{área superficial} = \text{área de tapa y fondo} + \text{área costados}$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

### ► Usar el modelo

Usamos el modelo para hallar el área superficial mínima de la lata. Graficamos  $S$  en la Figura 9 y hacemos acercamiento (zoom) en el punto mínimo para hallar que el valor mínimo de  $S$  es alrededor de  $554 \text{ cm}^2$  y se presenta cuando el radio es de unos  $5.4 \text{ cm}$ .



**FIGURA 9**  $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

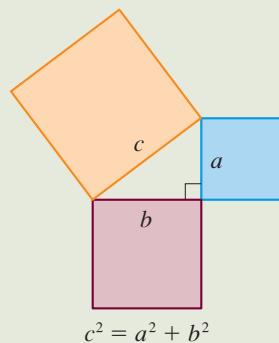
## PROBLEMAS

**1-18** ■ En estos problemas nos piden hallar una función que modele una situación real. Use los principios de modelar descritos en este *Enfoque* para ayudarse.

- Área** Un lote rectangular para construcción es tres veces más largo que ancho. Encuentre una función que modele su área  $A$  en términos de su ancho  $w$ .
- Área** Un cartel mide 10 pulgadas más de largo que de ancho. Encuentre una función que modele su área  $A$  en términos de su ancho  $w$ .
- Volumen** Una caja rectangular tiene base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen  $V$  en términos de su ancho  $w$ .
- Volumen** La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen  $V$  del cilindro en términos de su radio  $r$ .
- Área** Un rectángulo tiene un perímetro de 20 pies. Encuentre una función que modele su área  $A$  en términos de la longitud  $x$  de uno de sus lados.
- Perímetro** Un rectángulo tiene un área de  $16 \text{ m}^2$ . Encuentre una función que modele su perímetro  $P$  en términos de la longitud  $x$  de uno de sus lados.

**PITÁGORAS** (hacia 580-500 a.C.) fundó una escuela en Croton, en el sur de Italia, dedicada al estudio de aritmética, geometría, música y astronomía. Los pitagóricos, como se llamaron, eran una sociedad secreta con peculiares reglas y ritos de iniciación. No escribieron nada y no daban a conocer a nadie lo que habían aprendido del maestro. Aun cuando por ley se prohibía a las mujeres asistir a reuniones públicas, Pitágoras las permitía en su escuela y su más famosa discípula fue Theana (con quien posteriormente se casó).

Según Aristóteles, los pitagóricos estaban convencidos de que "los principios de las matemáticas son los principios de todas las cosas." Su frase era "Todo es un número," con la que querían decir números enteros. La sobresaliente aportación de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre. En un triángulo recto, el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas del cuadrado de los otros dos lados.



El recíproco del Teorema de Pitágoras también es verdadero; es decir, un triángulo cuyos lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  satisfacen  $a^2 + b^2 = c^2$  es un triángulo recto.

**7. Área** Encuentre una función que modele el área  $A$  de un triángulo equivalente en términos de la longitud  $x$  de uno de sus lados.

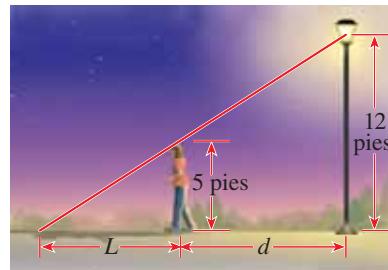
**8. Área** Encuentre una función que modele el área superficial  $S$  de un cubo en términos de su volumen  $V$ .

**9. Radio** Encuentre una función que modele el radio  $r$  de un círculo en términos de su área  $A$ .

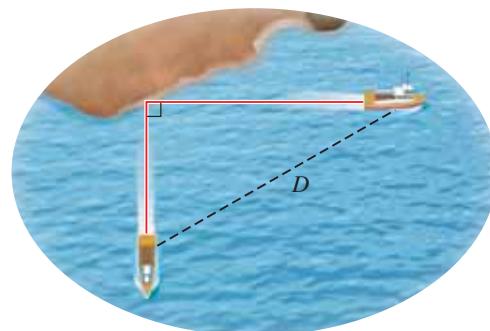
**10. Área** Encuentre una función que modele el área  $A$  de un círculo en términos de su circunferencia  $C$ .

**11. Área** Una caja rectangular con volumen de 60 pies<sup>3</sup> tiene una base cuadrada. Encuentre una función que modele su área superficial  $S$  en términos de la longitud  $x$  de un lado de su base.

**12. Longitud** Una mujer de 5 pies de estatura está de pie cerca de un farol que es de 12 pies de altura, como se ve en la figura. Encuentre una función que modele la longitud  $L$  de su sombra en términos de su distancia  $d$  desde la base del farol.



**13. Distancia** Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo. Uno navega al sur a 15 mi/h y, el otro, navega al este a 20 mi/h. Encuentre una función que modele la distancia  $D$  entre los barcos en términos del tiempo  $t$  (en horas) transcurrido desde su salida.

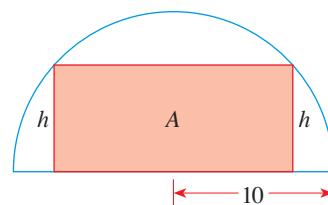


**14. Producto** La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto  $P$  en términos de  $x$ , uno de los números.

**15. Área** Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Encuentre una función que modele su área  $A$  en términos de la longitud de su base  $b$ .

**16. Perímetro** Un triángulo rectángulo tiene un cateto del doble de largo que el otro. Encuentre una función que modele el perímetro  $P$  en términos de la longitud  $x$  del cateto más corto.

**17. Área** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele el área  $A$  del rectángulo en términos de su altura  $h$ .



**18. Altura** El volumen de un cono es 100 pulg.<sup>3</sup>. Encuentre una función que modele la altura  $h$  del cono en términos de su radio  $r$ .

**19-32** ■ En estos problemas pedimos al estudiante hallar una función que modele una situación práctica, y luego usar el modelo para contestar preguntas acerca de la situación. Use las guías de la página 215 para ayudarse.



**19. Maximizar un producto** Considere el siguiente problema: Hallar dos números cuya suma es 19 y cuyo producto es tan grande como sea posible.

- Experimente con el problema, haciendo una tabla como la siguiente, que muestre el producto de pares diferentes de números que totalizan 19. Con base en la evidencia de la tabla, estime la respuesta al problema.
- Encuentre una función que modele el producto en términos de uno de los dos números.
- Use su modelo para resolver el problema y compárelo con su respuesta a la parte (a).



**20. Reducir al mínimo una suma** Encuentre dos números positivos cuya suma es 100 y la suma de cuyos cuadrados es mínima.

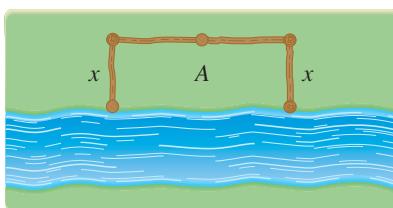


**21. Cerca alrededor de un campo** Considere el siguiente problema: Un agricultor tiene 2400 pies de malla para cercar y desea cercar un campo rectangular que bordea un río recto. No necesita cerca a lo largo del río (vea la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del campo de área máxima que él puede cercar?

- Experimente con el problema, trazando varios diagramas que ilustren la situación. Calcule el área de cada configuración y use sus resultados para estimar las dimensiones del campo más grande posible.

Primer número	Segundo número	Producto
1	18	18
2	17	34
3	16	48
⋮	⋮	⋮

- Encuentre una función que modele el área del campo en términos de uno de sus lados.
- Use su modelo para resolver el problema, y compárelo con su respuesta a la parte (a).



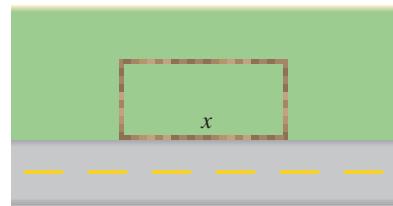
**22. Dividir un corral** Un ranchero con 750 pies de malla para cercar desea encerrar un área rectangular, y luego dividirla en cuatro corrales con cercas paralelas a un lado del rectángulo (vea la figura).

- Encuentre una función que modele el área total de los cuatro corrales.
- Encuentre el área total máxima posible de los cuatro corrales.



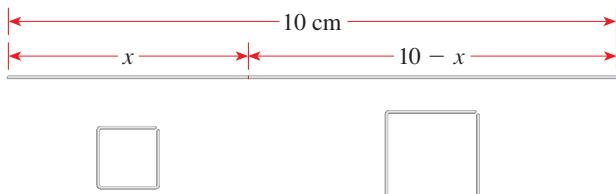
**23. Cercar un terreno para jardín** El dueño de una propiedad desea cercar un terreno para jardín adyacente a un camino, como se ve en la figura. La cerca junto al camino debe ser más robusta y cuesta \$5 por pie, pero la otra cerca cuesta sólo \$3 por pie. El jardín ha de tener un área de 1200 pies<sup>2</sup>.

- Encuentre una función que modele el costo de cercar el jardín.
- Encuentre las dimensiones del jardín que reduzcan al mínimo el costo de cercar el jardín.
- Si el dueño tiene a lo sumo \$600 para gastar en la cerca, encuentre el rango de longitudes que puede cercar a lo largo del camino.



-  **24. Maximizar un área** Un alambre de 10 cm de largo se corta en dos partes, una de longitud  $x$  y la otra de longitud  $10 - x$ , como se ve en la figura. Cada pieza se dobla en forma de cuadrado.

- (a) Encuentre una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados.  
 (b) Encuentre el valor de  $x$  que reduzca al mínimo el área total de los dos cuadrados.

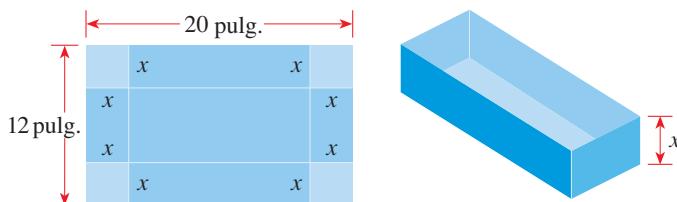


-  **25. Luz de una ventana** Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo, como se muestra en la figura de la izquierda. Se ha de construir una ventana normanda con perímetro de 30 pies.

- (a) Encuentre una función que modele el área de la ventana.  
 (b) Encuentre las dimensiones de la ventana que deje pasar la máxima cantidad de luz.

-  **26. Volumen de una caja** Se ha de construir una caja abierta por arriba, de un trozo rectangular de cartón con dimensiones de 12 pulgadas por 20 pulgadas, cortando cuadrados iguales de lado  $x$  en cada esquina y luego doblando hacia arriba los lados (vea la figura).

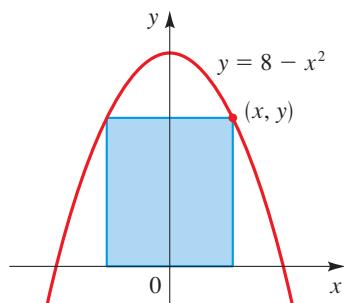
- (a) Encuentre una función que modele el volumen de la caja.  
 (b) Encuentre los valores de  $x$  para los cuales el volumen es mayor a 200 pulg.<sup>3</sup>.  
 (c) Encuentre el máximo volumen que tal caja pueda tener.



-  **27. Área de una caja** Una caja abierta con base cuadrada ha de tener un volumen de 12 pies<sup>3</sup>.

- (a) Encuentre una función que modele el área superficial de la caja.  
 (b) Encuentre las dimensiones de caja que reduzcan al mínimo la cantidad de material utilizado.

-  **28. Rectángulo inscrito** Encuentre las dimensiones que den la máxima área para el rectángulo que se muestra en la figura. Su base está sobre el eje  $x$  y los otros dos vértices están arriba del eje  $x$ , sobre la parábola  $y = 8 - x^2$ .



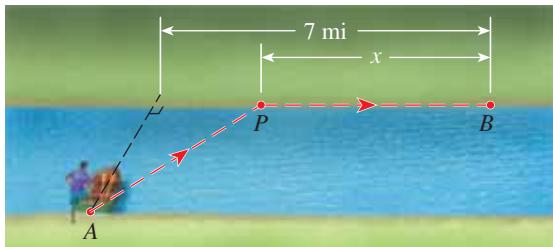
-  **29. Reducir costos al mínimo** Un ranchero desea construir un corral rectangular con un área de 100 m<sup>2</sup>.

- (a) Encuentre una función que modele la longitud de la cerca requerida.  
 (b) Encuentre las dimensiones del corral que requieran la mínima cantidad de malla para cerca.



- 30. Reducir al mínimo el tiempo** Un hombre está de pie en el punto  $A$  en la orilla de un río recto, de 2 millas de ancho. Para llegar al punto  $B$ , que está a 7 millas aguas abajo en la orilla opuesta, él rema en su bote al punto  $P$  en la orilla opuesta y luego camina la distancia  $x$  restante hasta  $B$ , como se muestra en la figura. Ahora ya puede remar a una velocidad de 2 millas/h y caminar a una velocidad de 5 millas/h.

- (a) Encuentre una función que modele el tiempo necesario para el viaje.  
 (b) ¿Dónde debe desembarcar para llegar a  $B$  tan pronto como sea posible?



- 31. Vuelo de pájaro** Se suelta un ave desde el punto  $A$  en una isla, a 5 millas del punto  $B$  más cercano en una orilla recta. El ave vuela al punto  $C$  en la orilla y luego vuela a lo largo de la orilla a su zona de anidar  $D$  (vea la figura). Suponga que el ave requiere 10 kcal/milla de energía para volar sobre tierra y 14 kcal/milla para volar sobre el agua.

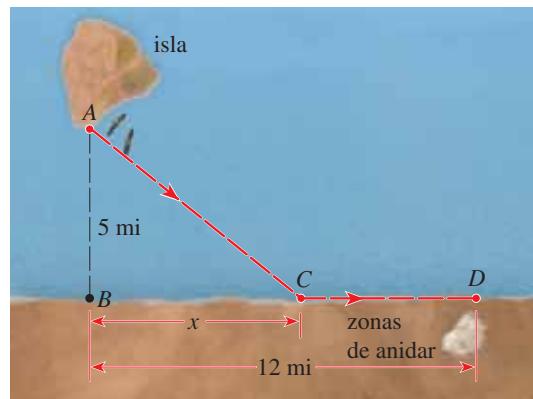
- (a) Use el dato de que

$$\text{energía empleada} = \text{energía por milla} \times \text{millas de vuelo}$$

para demostrar que el total de energía empleada por el ave está modelada por la función

$$E(x) = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

- (b) Si el ave instinctivamente escoge una trayectoria que reduce al mínimo su gasto de energía, ¿a qué punto vuela?



- 32. Área de una cometa** El bastidor de una cometa se ha de construir con seis piezas de madera. Las cuatro piezas que forman su borde han sido cortadas a las longitudes indicadas en la figura. Sea  $x$  como se muestra en la figura.

- (a) Demuestre que el área de la cometa está dada por la función

$$A(x) = x(\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{144 - x^2})$$

- (b) ¿Cuál debe ser la longitud de los dos travesaños para hacer máxima el área de la cometa?

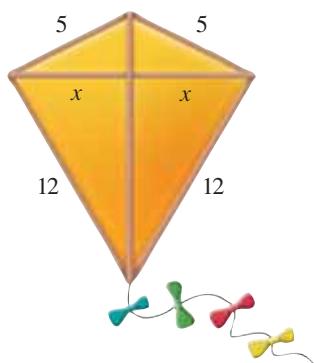




Image 100/Corbis

## FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

- 3.1** Funciones y modelos cuadráticos
- 3.2** Funciones polinomiales y sus gráficas
- 3.3** División de polinomios
- 3.4** Ceros reales de funciones polinomiales
- 3.5** Números complejos
- 3.6** Ceros complejos y el Teorema Fundamental de Álgebra
- 3.7** Funciones racionales

### ENFOQUE SOBRE MODELADO

Ajuste de datos a curvas con funciones polinomiales

Las funciones definidas por expresiones de polinomios se denominan funciones polinomiales. Las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos picos y valles; esto las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, la propietaria de una fábrica observa que si ella aumenta el número de trabajadores, aumenta la productividad, pero si hay demasiados trabajadores entonces la productividad empieza a disminuir. Esta situación está modelada por una función polinomial de grado 2 (una función cuadrática). Como otro ejemplo, cuando se golpea un balón de volibol, éste primero sube y luego baja, siguiendo una trayectoria que también está modelada por una función cuadrática. Las gráficas de funciones polinomiales son curvas sin irregularidades que se usan para diseñar muchas cosas. Por ejemplo, los diseñadores de botes de vela unen partes de las gráficas de diferentes funciones cúbicas (llamadas curvas paramétricas) para hacer las curvas del casco de un bote de velas.

## 3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal ▶ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ▶ Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado  $n$**  es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma  $P(x) = a_0$  y  $P(x) = a_1 x + a_0$ , respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

### FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

### ▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de paráolas, vea la Sección 11.1.

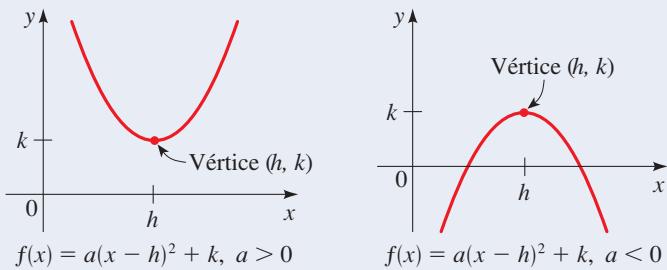
Si tomamos  $a = 1$  y  $b = c = 0$  en la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , obtenemos la función cuadrática  $f(x) = x^2$ , cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de  $f(x) = x^2$  por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

### FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de  $f$  es una parábola con vértice  $(h, k)$ ; la parábola abre hacia arriba si  $a > 0$  o hacia abajo si  $a < 0$ .



### EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática

Sea  $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$ .

(a) Exprese  $f$  en forma normal.

(b) Trace la gráfica de  $f$ .

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$$

El vértice es  $(3, 5)$

### SOLUCIÓN

- (a) Como el coeficiente de  $x^2$  no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen  $x$  antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2 \cdot 9 \\ &= 2(x - 3)^2 + 5 \end{aligned}$$

Factorice 2 de los términos en  $x$

Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste  $2 \cdot 9$  fuera

Factorice y simplifique

La forma normal es  $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ .

- (b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de  $f$  al tomar la parábola  $y = x^2$ , desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en  $(3, 5)$ , y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en  $y$  es  $f(0) = 23$ .

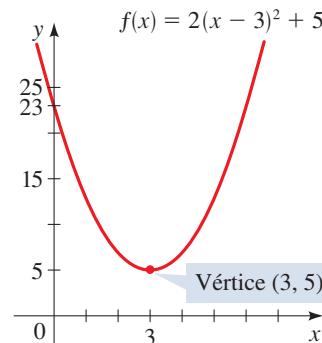


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13

### ▼ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

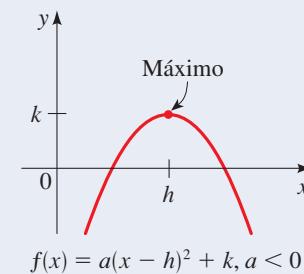
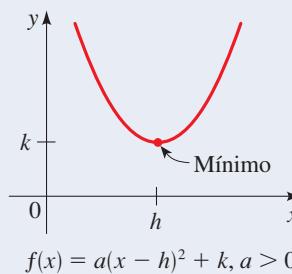
Si una función cuadrática tiene vértice  $(h, k)$ , entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando  $x = 3$ , porque el vértice  $(3, 5)$  es el punto más bajo en la gráfica.

#### VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea  $f$  una función cuadrática con forma estándar  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ . El valor máximo o mínimo de  $f$  ocurre en  $x = h$ .

Si  $a > 0$ , entonces el valor mínimo de  $f$  es  $f(h) = k$ .

Si  $a < 0$ , entonces el valor máximo de  $f$  es  $f(h) = k$ .



**EJEMPLO 2** | Valor mínimo de una función cuadráticaConsidere la función cuadrática  $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$ .

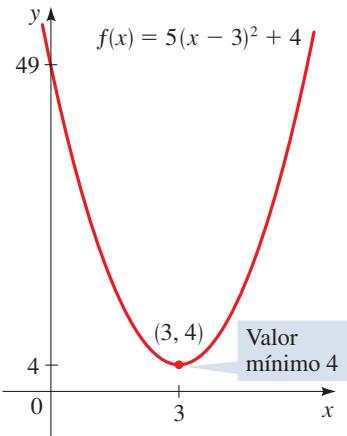
- Expresé  $f$  en forma normal.
- Trace la gráfica de  $f$ .
- Encuentre el valor mínimo de  $f$ .

**SOLUCIÓN**

- Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\
 &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\
 &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9} \\
 &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{dentro de paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\
 &&& \text{Factorice y simplifique}
 \end{aligned}$$

- La gráfica es la parábola que tiene su vértice en  $(3, 4)$  y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.
- Como el coeficiente de  $x^2$  es positivo,  $f$  tiene un valor mínimo. El valor mínimo es  $f(3) = 4$ .

**AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 25****FIGURA 2****EJEMPLO 3** | Valor máximo de una función cuadráticaConsidere la función cuadrática  $f(x) = -x^2 + x + 2$ .

- Expresé  $f$  en forma normal.
- Trace la gráfica de  $f$ .
- Encuentre el valor máximo de  $f$ .

**SOLUCIÓN**

- Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

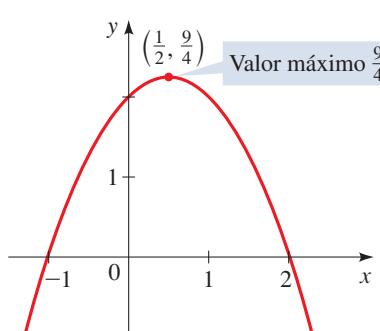
$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x^2 + x + 2 \\
 &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\
 &= -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + 2 - (-1)\frac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Sume } \frac{1}{4} \text{ dentro} \\
 &= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} && \text{de paréntesis, reste } (-1)\frac{1}{4} \text{ fuera} \\
 &&& \text{Factorice y simplifique}
 \end{aligned}$$

- De la forma normal vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice  $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ . Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. El punto de intersección en  $y$  es  $f(0) = 2$ . Para hallar los puntos de intersección en  $x$ , hacemos  $f(x) = 0$  y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned}
 -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\
 x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\
 (x - 2)(x + 1) &= 0 && \text{Factorice}
 \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en  $x$  son  $x = 2$  y  $x = -1$ . La gráfica de  $f$  se traza en la Figura 3.

- Como el coeficiente de  $x^2$  es negativo,  $f$  tiene un valor máximo, que es  $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$ .

**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27****FIGURA 3** Gráfica de  $f(x) = -x^2 + x + 2$ 

Expresar una función cuadrática en forma normal nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o

mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}
 \end{aligned}$$

Factorice  $a$  de los términos en  $x$   
Complete el cuadrado: sume  $\frac{b^2}{4a^2}$   
dentro de paréntesis, reste  
 $a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$  fuera  
Factorice

Esta ecuación está en forma normal con  $h = -b/(2a)$  y  $k = c - b^2/(4a)$ . Como el valor máximo o mínimo se presenta en  $x = h$ , tenemos el siguiente resultado.

### VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si  $a > 0$ , entonces el **valor mínimo** es  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ .

Si  $a < 0$ , entonces el **valor máximo** es  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ .

### EJEMPLO 4

Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

(a)  $f(x) = x^2 + 4x$       (b)  $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

#### SOLUCIÓN

(a) Ésta es una función cuadrática con  $a = 1$  y  $b = 4$ . Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como  $a > 0$ , la función tiene el valor *mínimo*.

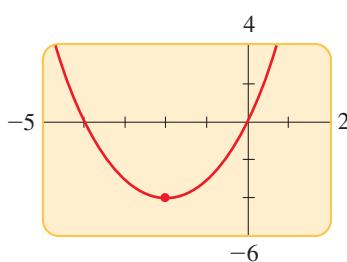
$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$

(b) Ésta es una función cuadrática con  $a = -2$  y  $b = 4$ . Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

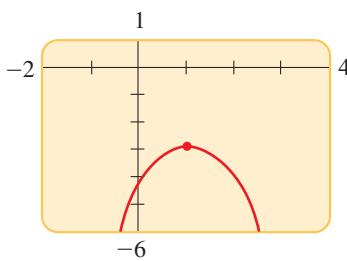
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como  $a < 0$ , la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$



El valor mínimo ocurre en  $x = -2$ .



El valor máximo ocurre en  $x = 1$ .

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 33 Y 35



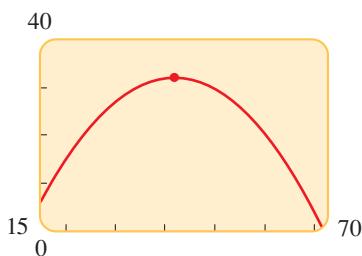
## ▼ Modelado con funciones cuadráticas

Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

### EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento  $M$  para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \quad 15 \leq s \leq 70$$



El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

donde  $s$  es la rapidez en mi/h y  $M$  se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?

**SOLUCIÓN** La función  $M$  es una función cuadrática con  $a = -\frac{1}{28}$  y  $b = 3$ . Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-\frac{1}{28})} = 42$$

El máximo es  $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$ . Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

### EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

- Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.
- Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.
- ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

#### SOLUCIÓN

- Exprese verbalmente el modelo. El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

**Escoja la variable.** Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de  $x$ .

Verbalmente	En álgebra
Precio del boleto	$x$
Cantidad que baja precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x)$

**Establezca el modelo.** El modelo que buscamos es la función  $R$  que da el ingreso para un determinado precio de boleto  $x$ .

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$

$$R(x) = x(23,500 - 1000x)$$

$$R(x) = 23,500x - 1000x^2$$

- (b) **Use el modelo.** Como  $R$  es función cuadrática con  $a = -1000$  y  $b = 23,500$ , el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23,500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

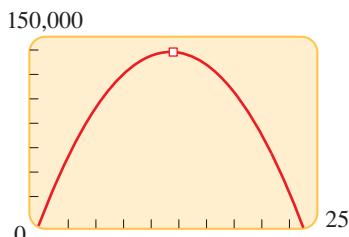
- (c) **Use el modelo.** Deseamos hallar el precio del boleto por el que  $R(x) = 0$ .

$$23,500x - 1000x^2 = 0 \quad \text{Haga } R(x) = 0$$

$$23.5x - x^2 = 0 \quad \text{Divida entre 1000}$$

$$x(23.5 - x) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \quad \text{Despeje } x$$



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 77

## 3.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

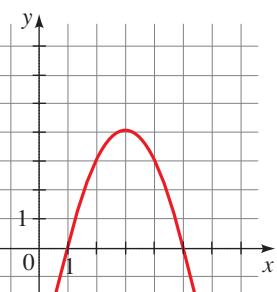
- Para poner la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  en forma normal, completamos el\_\_\_\_\_.
- La función cuadrática  $f(x) = a(x - h)^2 + k$  está en forma normal.
  - La gráfica de  $f$  es una parábola con vértice (\_\_\_\_, \_\_\_\_).
  - Si  $a > 0$ , la gráfica de  $f$  abre hacia \_\_\_\_\_. En este caso  $f(h) = k$  es el valor \_\_\_\_\_ de  $f$ .
  - Si  $a < 0$ , la gráfica de  $f$  abre hacia \_\_\_\_\_. En este caso  $f(h) = k$  es el valor \_\_\_\_\_ de  $f$ .
- La gráfica de  $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$  es una parábola que abre hacia \_\_\_\_\_, con su vértice en (\_\_\_\_, \_\_\_\_), y  $f(3) =$  \_\_\_\_\_ es el valor (mínimo/máximo) \_\_\_\_\_ de  $f$ .
- La gráfica de  $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$  es una parábola que abre hacia \_\_\_\_\_, con su vértice en (\_\_\_\_, \_\_\_\_),

$y f(3) =$  \_\_\_\_\_ es el valor (mínimo/máximo) \_\_\_\_\_ de  $f$ .

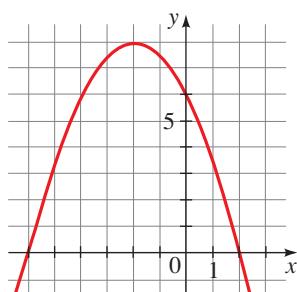
### HABILIDADES

- 5-8 ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática  $f$ . (a) Encuentre las coordenadas del vértice. (b) Encuentre el valor máximo o mínimo de  $f$ . (c) Encuentre el dominio y rango de  $f$ .

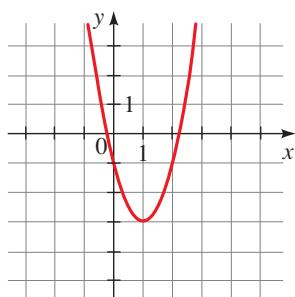
5.  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



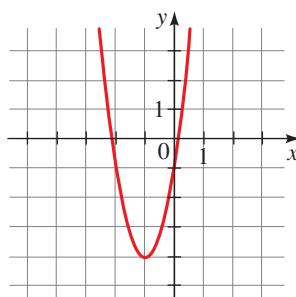
6.  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7.  $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



8.  $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9-22 ■ Nos dan una función cuadrática. (a) Exprese la función cuadrática en forma normal. (b) Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección x y y. (c) Trace su gráfica.

9.  $f(x) = x^2 - 6x$

10.  $f(x) = x^2 + 8x$

11.  $f(x) = 2x^2 + 6x$

12.  $f(x) = -x^2 + 10x$

13.  $f(x) = x^2 + 4x + 3$

14.  $f(x) = x^2 - 2x + 2$

15.  $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

16.  $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

17.  $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

18.  $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

19.  $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

20.  $f(x) = 2x^2 + x - 6$

21.  $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$

22.  $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

23-32 ■ Nos dan una función cuadrática. (a) Exprese la función cuadrática en forma normal. (b) Trace su gráfica. (c) Encuentre su valor máximo o mínimo.

23.  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

24.  $f(x) = x^2 - 8x + 8$

25.  $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

26.  $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

27.  $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

28.  $f(x) = 1 - 6x - x^2$

29.  $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$

30.  $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

31.  $h(x) = 1 - x - x^2$

32.  $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

33-42 ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

33.  $f(x) = x^2 + x + 1$

34.  $f(x) = 1 + 3x - x^2$

35.  $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$

36.  $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

37.  $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$

38.  $g(x) = 100x^2 - 1500x$

39.  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

40.  $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x + 7$

41.  $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$

42.  $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

43. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice  $(1, -2)$  y que pasa por el punto  $(4, 16)$ .

44. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice  $(3, 4)$  y que pasa por el punto  $(1, -8)$ .

45-48 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

45.  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

46.  $f(x) = x^2 - 2x - 3$

47.  $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$

48.  $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

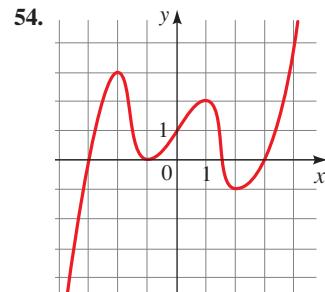
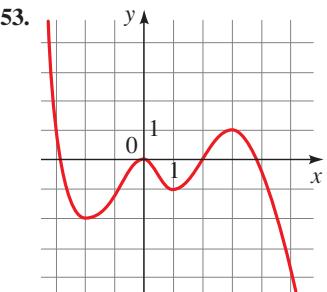
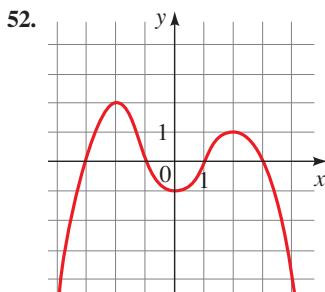
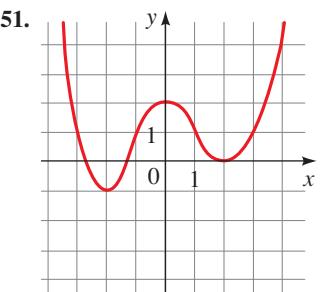


49-50 ■ Nos dan una función cuadrática. (a) Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática  $f$ , correcta a dos lugares decimales. (b) Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de  $f$ , y compárelo con su respuesta de la parte (a).

49.  $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

50.  $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

51-54 ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.



55-62 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de  $x$  en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

55.  $f(x) = x^3 - x$

56.  $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

57.  $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

58.  $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

59.  $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

60.  $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

61.  $V(x) = \frac{1 - x^2}{x^3}$

62.  $V(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

## APLICACIONES

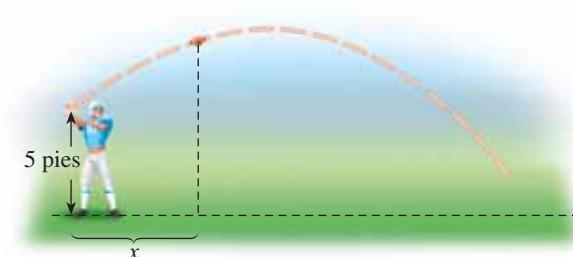
63. **Altura de una pelota** Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de  $t$  segundos está dada por  $y = 40t - 16t^2$ . ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

- 64. Trayectoria de un balón** Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2} x^2 + x + 5$$

donde  $x$  es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

- (a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.  
 (b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



- 65. Ingresos** Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender  $x$  unidades de cierta mercancía está dado por la función  $R(x) = 80x - 0.4x^2$ , donde el ingreso  $R(x)$  se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

- 66. Ventas** Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende  $x$  latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

- 67. Publicidad** La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad  $E$  se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

donde  $n$  es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

- 68. Productos farmacéuticos** Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de  $t$  minutos está dada por  $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$ , donde  $0 \leq t \leq 240$  y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

- 69. Agricultura** El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si  $n$  árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce  $900 - 9n$  manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

- ¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



- 70. Agricultura** En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1 por ciento. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

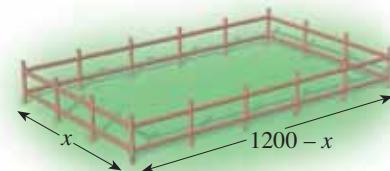
donde  $n$  es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

- 71-74** Use las fórmulas de esta sección para dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque en el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 220-221.

- 71. Problema 21** **72. Problema 22**  
**73. Problema 25** **74. Problema 24**

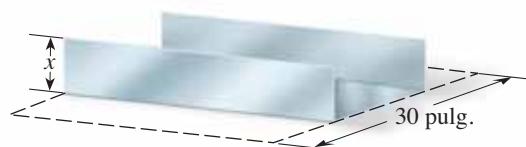
- 75. Cercar un corral para caballos** Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

- (a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho  $x$  del corral.  
 (b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.



- 76. Hacer un canal para agua de lluvia** Un canal para agua llovienda se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

- (a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de  $x$ .  
 (b) Encuentre el valor de  $x$  que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.  
 (c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



35. **Interés compuesto** ¿Cuál de las tasas dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

- (a)  $2\frac{1}{2}\%$  al año, capitalizado semestralmente  
 (b)  $2\frac{1}{4}\%$  al año, capitalizado mensualmente  
 (c) 2% al año, capitalizado continuamente

36. **Interés compuesto** ¿Cuál de las tasas de interés dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

- (a)  $5\frac{1}{8}\%$  al año, capitalizado semestralmente  
 (b) 5% al año, capitalizado continuamente

37. **Inversión** Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 9% al año, capitalizado continuamente.  
 (a) Encuentre el valor  $A(t)$  de la inversión después de  $t$  años.

- (b) Trace una gráfica de  $A(t)$ .

- (c) Use la gráfica de  $A(t)$  para determinar cuándo esta inversión ascenderá a \$25,000.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN



38. **La definición de  $e$**  Ilustre la definición del número  $e$  al graficar la curva  $y = (1 + 1/x)^x$  y la recta  $y = e^x$  en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista  $[0, 40]$  por  $[0, 4]$ .

## 4.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Funciones logarítmicas ► Gráficas de funciones logarítmicas ► Logaritmos comunes ► Logaritmos naturales

En esta sección estudiamos las inversas de funciones exponenciales.

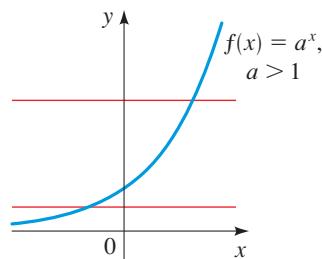


FIGURA 1  $f(x) = a^x$  es biunívoca.

### ▼ Funciones logarítmicas

Toda función exponencial  $f(x) = a^x$ , con  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , es una función biunívoca por la Prueba de la Recta Horizontal (vea Figura 1 para el caso  $a > 1$ ) y por tanto tiene una función inversa. La función inversa  $f^{-1}$  se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con  $\log_a$ . Recuerde de la Sección 2.6 que  $f^{-1}$  está definida por

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Esto lleva a la siguiente definición de la función logarítmica.

#### DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea  $a$  un número positivo con  $a \neq 1$ . La **función logarítmica con base  $a$** , denotada por  $\log_a$ , está definida por

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Por lo tanto,  $\log_a x$  es el *exponente* al cual la base  $a$  debe ser elevado para obtener  $x$ .

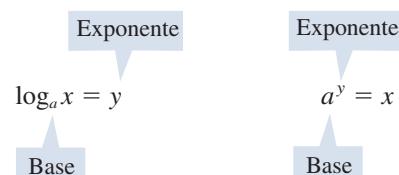
Leemos  $\log_a x = y$  como “el log base  $a$  de  $x$  es  $y$ ”.

Por tradición el nombre de la función logarítmica es  $\log_a$ , no sólo una letra. También, por lo general omitimos los paréntesis en la notación de función y escribimos

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la **forma logarítmica**  $\log_a x = y$  y la **forma exponencial**  $a^y = x$ , es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

**Forma logarítmica**      **Forma exponencial**



**EJEMPLO 1** | Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por lo tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100,000 = 5$	$10^5 = 100,000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5** 

Es importante entender que  $\log_a x$  es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Éste es el caso para todas las bases, como ilustra el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 2** | Evaluación de logaritmos

- (a)  $\log_{10} 1000 = 3$  porque  $10^3 = 1000$   
 (b)  $\log_2 32 = 5$  porque  $2^5 = 32$   
 (c)  $\log_{10} 0.1 = -1$  porque  $10^{-1} = 0.1$   
 (d)  $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$  porque  $16^{1/2} = 4$

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 7 Y 9** 

$x$	$\log_{10} x$
$10^4$	4
$10^3$	3
$10^2$	2
10	1
1	0
$10^{-1}$	-1
$10^{-2}$	-2
$10^{-3}$	-3
$10^{-4}$	-4

**Propiedad de la Función Inversa:**

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Cuando aplicamos la Propiedad de la Función Inversa descrita en la página 201 a  $f(x) = a^x$  y  $f^{-1}(x) = \log_a x$ , obtenemos

$$\log_a(a^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0$$

Hacemos una lista de éstas y otras propiedades de logaritmos que estudiamos en esta sección.

**PROPIEDADES DE LOGARITMOS****Propiedad**

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$

**Razón**

- Debemos elevar  $a$  a la potencia 0 para obtener 1.  
 Debemos elevar  $a$  a la potencia 1 para obtener  $a$ .  
 Debemos elevar  $a$  a la potencia  $x$  para obtener  $a^x$ .  
 $\log_a x$  es la potencia a la que  $a$  debe elevarse para obtener  $x$ .

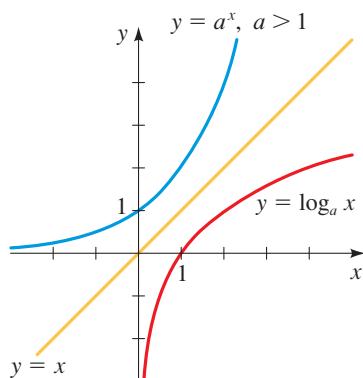
**EJEMPLO 3** | Aplicar propiedades de logaritmos

Ilustramos las propiedades de logaritmos cuando la base es 5.

$$\log_5 1 = 0 \quad \text{Propiedad 1} \quad \log_5 5 = 1 \quad \text{Propiedad 2}$$

$$\log_5 5^8 = 8 \quad \text{Propiedad 3} \quad 5^{\log_5 12} = 12 \quad \text{Propiedad 4}$$

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 19 Y 25** 



**FIGURA 2** Gráfica de la función logarítmica  $f(x) = \log_a x$

## ▼ Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que si una función biunívoca  $f$  tiene dominio  $A$  y rango  $B$ , entonces su función inversa  $f^{-1}$  tiene dominio  $B$  y rango  $A$ . Como la función exponencial  $f(x) = a^x$  con  $a \neq 1$  tiene dominio  $\mathbb{R}$  y rango  $(0, \infty)$ , concluimos que su función inversa,  $f^{-1}(x) = \log_a x$ , tiene dominio  $(0, \infty)$  y rango  $\mathbb{R}$ .

La gráfica de  $f^{-1}(x) = \log_a x$  se obtiene al reflejar la gráfica de  $f(x) = a^x$  en la recta  $y = x$ . La Figura 2 muestra el caso  $a > 1$ . El hecho de que  $y = a^x$  (para  $a > 1$ ) sea una función muy rápidamente creciente para  $x > 0$  implica que  $y = \log_a x$  es una función muy rápidamente creciente para  $x > 1$  (vea Ejercicio 92).

Como  $\log_a 1 = 0$ , el punto de intersección  $x$  de la función  $y = \log_a x$  es 1. El eje  $y$  es una asíntota vertical de  $y = \log_a x$  porque  $\log_a x \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ .

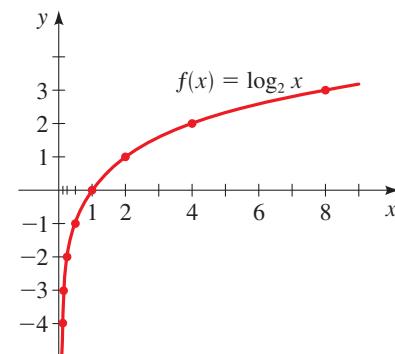
### EJEMPLO 4

### Graficar una función logarítmica localizando puntos

Trace la gráfica de  $f(x) = \log_2 x$ .

**SOLUCIÓN** Para hacer una tabla de valores, escogemos los valores  $x$  que sean potencias de 2 para que podamos fácilmente hallar sus logaritmos. Localizamos estos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 3.

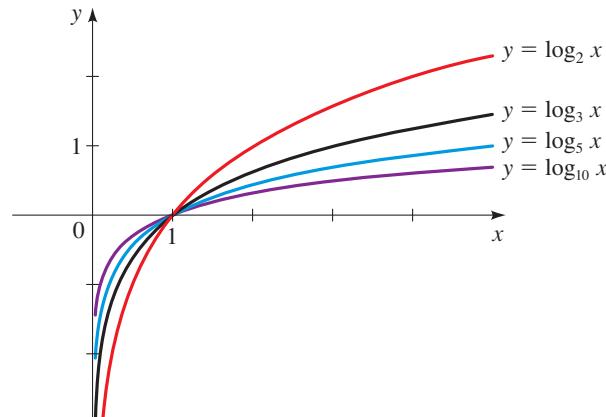
$x$	$\log_2 x$
$2^3$	3
$2^2$	2
2	1
1	0
$2^{-1}$	-1
$2^{-2}$	-2
$2^{-3}$	-3
$2^{-4}$	-4



**FIGURA 3**

### AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 41

La Figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de  $y = 2^x$ ,  $y = 3^x$ ,  $y = 5^x$  y  $y = 10^x$  (vea Figura 2 en la Sección 4.1) en la recta  $y = x$ . También podemos localizar puntos como ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en el Ejemplo 4.



**FIGURA 4** Familia de funciones logarítmicas

## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO



© Bettmann/CORBIS



© Hulton-Deutsch Collection/CORBIS

## Aplicación de la ley

Las matemáticas ayudan a la aplicación de la ley en numerosas y sorprendentes formas, desde la reconstrucción de trayectorias de balas hasta determinar el tiempo de una muerte, para calcular la probabilidad de que una muestra de ADN sea de una persona en particular. Un uso interesante está en la búsqueda de personas desaparecidas. Una persona que haya estado desaparecida durante años podría verse muy diferente respecto de su más reciente fotografía disponible. Esto es particularmente cierto si la persona desaparecida es un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado usted cómo se verá dentro de 5, 10 o 15 años?

Unos investigadores han hallado que diferentes partes del cuerpo crecen más rápido que otras. Por ejemplo, sin duda usted ha observado que la cabeza de un bebé es mucho más grande con respecto a su cuerpo que la cabeza de un adulto. Como otro ejemplo, la relación entre la longitud del brazo de una persona y la estatura de ésta es  $\frac{1}{3}$  en un niño pero alrededor de  $\frac{2}{5}$  en un adulto. Al recolectar datos y analizar gráficas, los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Al igual que en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan una función de importancia decisiva. Por ejemplo, la fórmula que relaciona la longitud  $l$  de un brazo con la estatura  $h$  es  $l = ae^{kh}$  donde  $a$  y  $k$  son constantes. Estudiando varias características físicas de una persona, biólogos matemáticos modelan cada una de las características con una función que describe la forma en que cambian con el tiempo. Los modelos de características del rostro se pueden programar en una computadora para dar una imagen de cómo cambia con el tiempo la apariencia de una persona. Estas imágenes ayudan a departamentos de aplicación de la ley para localizar a personas extraviadas.

En los siguientes dos ejemplos graficamos funciones logarítmicas empezando con las gráficas básicas de la Figura 4 y usando las transformaciones de la Sección 2.5.

## EJEMPLO 5 | Reflejar gráficas de funciones logarítmicas

Trace la gráfica de cada función.

- (a)  $g(x) = -\log_2 x$   
 (b)  $h(x) = \log_2(-x)$

## SOLUCIÓN

- (a) Empezamos con la gráfica de  $f(x) = \log_2 x$  y la reflejamos en el eje  $x$  para obtener la gráfica de  $g(x) = -\log_2 x$  en la Figura 5(a).  
 (b) Empezamos con la gráfica de  $f(x) = \log_2 x$  y la reflejamos en el eje  $y$  para obtener la gráfica de  $h(x) = \log_2(-x)$  en la Figura 5(b).

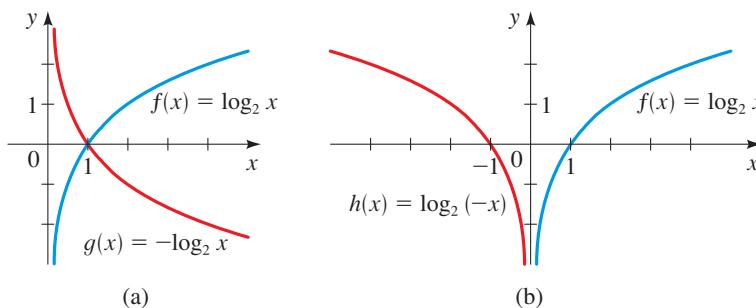


FIGURA 5

## AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 55

## EJEMPLO 6 | Desplazar gráficas de funciones logarítmicas

Encuentre el dominio de cada función y trace la gráfica.

- (a)  $g(x) = 2 + \log_5 x$   
 (b)  $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

## SOLUCIÓN

- (a) La gráfica de  $g$  se obtiene de la gráfica de  $f(x) = \log_5 x$  (Figura 4) al desplazar hacia arriba 2 unidades (vea Figura 6). El dominio de  $f$  es  $(0, \infty)$ .

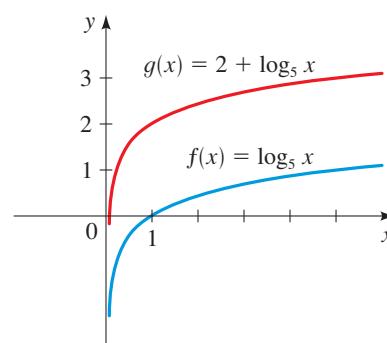


FIGURA 6

- (b) La gráfica de  $h$  se obtiene de la gráfica de  $f(x) = \log_{10} x$  (Figura 4) al desplazar a la derecha 3 unidades (vea Figura 7). La recta  $x = 3$  es una asíntota vertical. Como  $\log_{10} x$  está definido sólo cuando  $x > 0$ , el dominio de  $h(x) = \log_{10}(x - 3)$  es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$



Library of Congress

**JOHN NAPIER** (1550-1617) fue un tebrantiente escocés para quien las matemáticas eran un pasatiempo favorito. Hoy lo conocemos por su invención clave: los logaritmos, que él publicó en 1614 bajo el título de *A description of the Marvelous Rule of Logarithms* (*Una descripción de la Maravillosa Regla de los Logaritmos*). En la época de Napier, los logaritmos eran utilizados exclusivamente para simplificar complicados cálculos. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes, los escribiríamos como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57,783 \\ \approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ = 10^{8.41809} \\ \approx 261,872,564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (sólo sumamos sus exponentes). Napier produjo extensas tablas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde el advenimiento de calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito, pero las funciones logarítmicas han encontrado numerosas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre innumerables temas. Una de sus obras más pintorescas es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, en el que predijo que el mundo se acabaría en el año 1700.

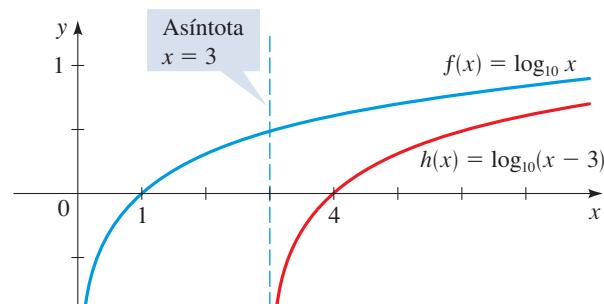


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 53 Y 57

## Logaritmos comunes

Ahora estudiamos logaritmos con base 10.

### LOGARITMO COMÚN

El logaritmo común con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos podemos fácilmente hallar que

$$\log 10 = 1 \quad \text{y} \quad \log 100 = 2$$

Pero ¿cómo definimos  $\log 50$ ? Necesitamos hallar el exponente  $y$  tal que  $10^y = 50$ . Claramente, 1 es demasiado pequeño y 2 es demasiado grande. Por lo tanto

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación, podemos experimentar para hallar una potencia de 10 más cercana a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla **LOG** que directamente da valores de logaritmos comunes.

### EJEMPLO 7 | Evaluar logaritmos comunes

Use calculadora para hallar valores apropiados de  $f(x) = \log x$  y utilice los valores para trazar la gráfica.

**SOLUCIÓN** Hacemos una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de  $x$  que no sean potencias de 10. Localizamos esos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 8.

$x$	$\log x$
0.01	-2
0.1	-1
0.5	-0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

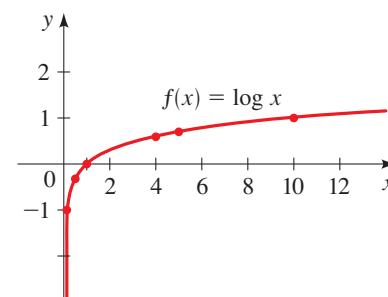


FIGURA 8

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 43



La respuesta humana al sonido e intensidad luminosa es logarítmica.

Estudiamos la escala de decibeles en más detalle en la Sección 4.6.

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (sonido, luz o presión) usando funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido debe ser aumentado muchas veces antes que “sintamos” que la intensidad simplemente se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde  $S$  es la intensidad subjetiva del estímulo,  $I$  es la intensidad física del estímulo,  $I_0$  representa el umbral de intensidad física y  $k$  es una constante que es diferente para cada estímulo sensorial.

### EJEMPLO 8 | Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la intensidad  $B$  (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física  $I$  (en  $\text{W/m}^2$ ) está dada por

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde  $I_0$  es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física  $I$  es 100 veces la de  $I_0$ .

**SOLUCIÓN** Encontramos el nivel de decibeles  $B$  usando el hecho de que  $I = 100I_0$ .

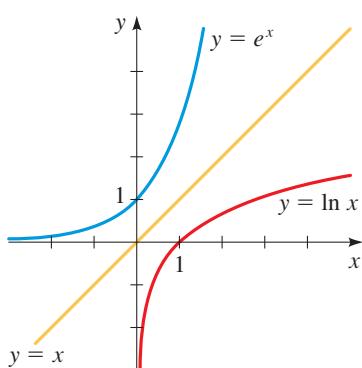
$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de } B \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Cancela } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La intensidad del sonido es de 20 dB.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 87

### ▼ Logaritmos naturales

La notación  $\ln$  es una abreviatura del nombre latino *logarithmus naturalis*.



#### LOGARITMO NATURAL

El logaritmo con base  $e$  se denomina **logaritmo natural** y se denota con **ln**:

$$\ln x = \log_e x$$

La función de logaritmo natural  $y = \ln x$  es la función inversa de la función exponencial natural  $y = e^x$ . Ambas funciones están graficadas en la Figura 9. Por la definición de funciones inversas tenemos

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Si sustituimos  $a = e$  y escribimos “ln” por “ $\log_e$ ” en las propiedades de logaritmos ya citadas antes, obtenemos las siguientes propiedades de logaritmos naturales.

**FIGURA 9** Gráfica de la función de logaritmo natural

## PROPIEDADES DE LOGARITMOS NATURALES

## Propiedad

1.  $\ln 1 = 0$
2.  $\ln e = 1$
3.  $\ln e^x = x$
4.  $e^{\ln x} = x$

## Razón

- Debemos elevar  $e$  a la potencia 0 para obtener 1.  
 Debemos elevar  $e$  a la potencia 1 para obtener  $e$ .  
 Debemos elevar  $e$  a la potencia  $x$  para obtener  $e^x$ .  
 $\ln x$  es la potencia a la que  $e$  debe elevarse para obtener  $x$ .

Las calculadoras están equipadas con una tecla  $\boxed{\text{LN}}$  que directamente presenta los valores de logaritmos naturales.

## EJEMPLO 9 | Evaluar la función de logaritmo natural

- (a)  $\ln e^8 = 8$  Definición de logaritmo natural  
 (b)  $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$  Definición de logaritmo natural  
 (c)  $\ln 5 \approx 1.609$  Use la tecla  $\boxed{\text{LN}}$  de su calculadora

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39

## EJEMPLO 10 | Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función  $f(x) = \ln(4 - x^2)$ .

**SOLUCIÓN** Igual que con cualquier función logarítmica,  $\ln x$  está definida cuando  $x > 0$ . Entonces, el dominio de  $f$  es

$$\begin{aligned} \{x \mid 4 - x^2 > 0\} &= \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} \\ &= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2) \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 63

## EJEMPLO 11 | Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función  $y = x \ln(4 - x^2)$ , y úsela para hallar las asíntotas y valores máximo y mínimo locales.

**SOLUCIÓN** Como en el Ejemplo 10, el dominio de esta función es el intervalo  $(-2, 2)$ , de modo que escogemos el rectángulo de vista  $[-3, 3]$  por  $[-3, 3]$ . La gráfica se muestra en la Figura 10, y de ella vemos que las rectas  $x = -2$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de  $x = 1$  y un punto mínimo local a la izquierda de  $x = -1$ . Al hacer acercamiento (zoom) y trazar a lo largo de la gráfica con el cursor, encontramos que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando  $x \approx 1.15$ . Del mismo modo (o al observar que la función es impar), encontramos que el valor mínimo local es alrededor de  $-1.13$  y se presenta cuando  $x \approx -1.15$ .

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69

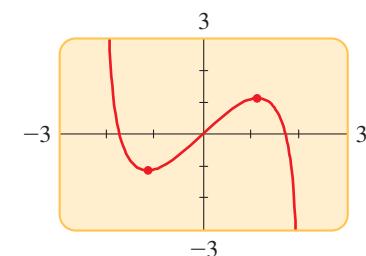


FIGURA 10

$$y = x \ln(4 - x^2)$$

## 4.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1.  $\log x$  es el exponente al cual la base 10 debe elevarse para obtener \_\_\_\_\_. Por lo tanto, podemos completar la tabla siguiente para  $\log x$ .

$x$	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{1/2}$
$\log x$								

2. La función  $f(x) = \log_9 x$  es la función logarítmica con base \_\_\_\_\_. Por tanto,  $f(9) =$  \_\_\_\_\_,  $f(1) =$  \_\_\_\_\_,  $f(\frac{1}{9}) =$  \_\_\_\_\_, y  $f(3) =$  \_\_\_\_\_.

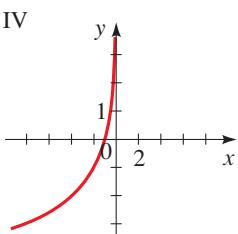
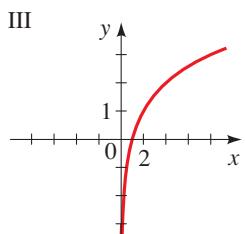
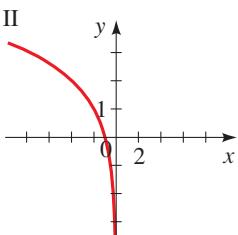
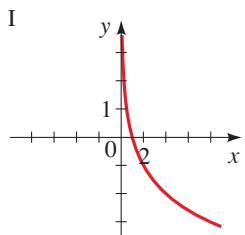
3. (a)  $5^3 = 125$ , entonces  $\log_5 \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{00}}$

(b)  $\log_5 25 = 2$ , entonces  $\boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{00}}$

4. Relacione la función logarítmica con su gráfica.

(a)  $f(x) = \log_2 x$  (b)  $f(x) = \log_2(-x)$

(c)  $f(x) = -\log_2 x$  (d)  $f(x) = -\log_2(-x)$



### HABILIDADES

- 5-6 ■ Complete la tabla al hallar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación, como en el Ejemplo 1.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	$\boxed{\phantom{00}} = 4$
$\log_8 \left(\frac{1}{8}\right) = -1$	$8^{\frac{2}{3}} = \boxed{\phantom{00}}$ $8^3 = 512$ $8^{-2} = \boxed{\phantom{00}}$

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	$4^3 = 64$
$\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$	$4^{3/2} = 8$
$\log_4 \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

- 7-12 ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

7. (a)  $\log_5 25 = 2$  (b)  $\log_5 1 = 0$   
 8. (a)  $\log_{10} 0.1 = -1$  (b)  $\log_8 512 = 3$   
 9. (a)  $\log_8 2 = \frac{1}{3}$  (b)  $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$   
 10. (a)  $\log_3 81 = 4$  (b)  $\log_8 4 = \frac{2}{3}$   
 11. (a)  $\ln 5 = x$  (b)  $\ln y = 5$   
 12. (a)  $\ln(x + 1) = 2$  (b)  $\ln(x - 1) = 4$

- 13-18 ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

13. (a)  $5^3 = 125$  (b)  $10^{-4} = 0.0001$   
 14. (a)  $10^3 = 1000$  (b)  $81^{1/2} = 9$   
 15. (a)  $8^{-1} = \frac{1}{8}$  (b)  $2^{-3} = \frac{1}{8}$   
 16. (a)  $4^{-3/2} = 0.125$  (b)  $7^3 = 343$   
 17. (a)  $e^x = 2$  (b)  $e^3 = y$   
 18. (a)  $e^{x+1} = 0.5$  (b)  $e^{0.5x} = t$

- 19-28 ■ Evalúe la expresión.

19. (a)  $\log_3 3$  (b)  $\log_3 1$  (c)  $\log_3 3^2$   
 20. (a)  $\log_5 5^4$  (b)  $\log_4 64$  (c)  $\log_3 9$   
 21. (a)  $\log_6 36$  (b)  $\log_9 81$  (c)  $\log_7 7^{10}$   
 22. (a)  $\log_2 32$  (b)  $\log_8 8^{17}$  (c)  $\log_6 1$   
 23. (a)  $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right)$  (b)  $\log_{10} \sqrt{10}$  (c)  $\log_5 0.2$   
 24. (a)  $\log_5 125$  (b)  $\log_{49} 7$  (c)  $\log_9 \sqrt{3}$   
 25. (a)  $2^{\log_2 37}$  (b)  $3^{\log_3 8}$  (c)  $e^{\ln \sqrt{5}}$   
 26. (a)  $e^{\ln \pi}$  (b)  $10^{\log 5}$  (c)  $10^{\log 87}$   
 27. (a)  $\log_8 0.25$  (b)  $\ln e^4$  (c)  $\ln(1/e)$   
 28. (a)  $\log_4 \sqrt{2}$  (b)  $\log_4 \left(\frac{1}{2}\right)$  (c)  $\log_4 8$

- 29-36 ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar  $x$ .

29. (a)  $\log_2 x = 5$  (b)  $\log_2 16 = x$   
 30. (a)  $\log_5 x = 4$  (b)  $\log_{10} 0.1 = x$   
 31. (a)  $\log_3 243 = x$  (b)  $\log_3 x = 3$   
 32. (a)  $\log_4 2 = x$  (b)  $\log_4 x = 2$   
 33. (a)  $\log_{10} x = 2$  (b)  $\log_5 x = 2$

34. (a)  $\log_5 1000 = 3$

(b)  $\log_5 25 = 2$

35. (a)  $\log_5 16 = 4$

(b)  $\log_5 8 = \frac{3}{2}$

36. (a)  $\log_5 6 = \frac{1}{2}$

(b)  $\log_5 3 = \frac{1}{3}$

37-40 ■ Use calculadora para evaluar la expresión, aproximada a cuatro lugares decimales.

37. (a)  $\log 2$

(b)  $\log 35.2$

(c)  $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

38. (a)  $\log 50$

(b)  $\log \sqrt{2}$

(c)  $\log(3\sqrt{2})$

39. (a)  $\ln 5$

(b)  $\ln 25.3$

(c)  $\ln(1 + \sqrt{3})$

40. (a)  $\ln 27$

(b)  $\ln 7.39$

(c)  $\ln 54.6$

41-44 ■ Trace la gráfica de la función al localizar puntos.

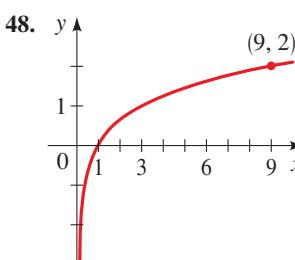
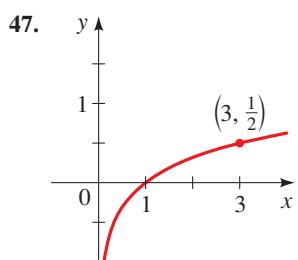
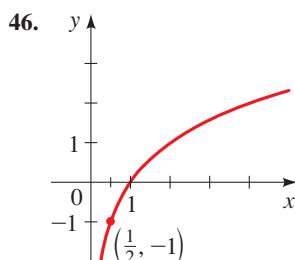
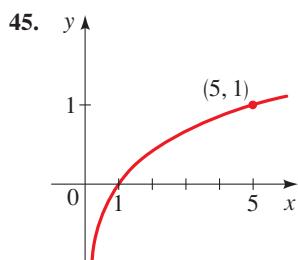
41.  $f(x) = \log_3 x$

42.  $g(x) = \log_4 x$

43.  $f(x) = 2 \log x$

44.  $g(x) = 1 + \log x$

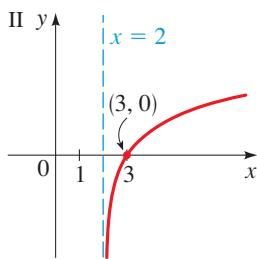
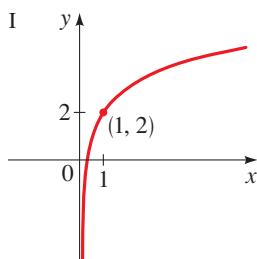
45-48 ■ Encuentre la función de la forma  $y = \log_a x$  cuya gráfica se da.



49-50 ■ Relacione la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I o II.

49.  $f(x) = 2 + \ln x$

50.  $f(x) = \ln(x - 2)$



51. Trace la gráfica de  $y = 4^x$  y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de  $y = \log_4 x$ .

52. Trace la gráfica de  $y = 3^x$  y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de  $y = \log_3 x$ .

53-62 ■ Grafique la función, no al localizar puntos sino empezando de las gráficas de las Figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

53.  $f(x) = \log_2(x - 4)$

54.  $f(x) = -\log_{10} x$

55.  $g(x) = \log_5(-x)$

56.  $g(x) = \ln(x + 2)$

57.  $y = 2 + \log_3 x$

58.  $y = \log_3(x - 1) - 2$

59.  $y = 1 - \log_{10} x$

60.  $y = 1 + \ln(-x)$

61.  $y = |\ln x|$

62.  $y = \ln |x|$

63-68 ■ Encuentre el dominio de la función.

63.  $f(x) = \log_{10}(x + 3)$

64.  $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

65.  $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$

66.  $g(x) = \ln(x - x^2)$

67.  $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

68.  $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

69-74 ■ Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado, y úsela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

69.  $y = \log_{10}(1 - x^2)$

70.  $y = \ln(x^2 - x)$

71.  $y = x + \ln x$

72.  $y = x(\ln x)^2$

73.  $y = \frac{\ln x}{x}$

74.  $y = x \log_{10}(x + 10)$

75-78 ■ Encuentre las funciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$  y sus dominios.

75.  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = x + 1$

76.  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = x^2 + 1$

77.  $f(x) = \log_2 x$ ,  $g(x) = x - 2$

78.  $f(x) = \log x$ ,  $g(x) = x^2$

79. Compare las rapideces de crecimiento de las funciones  $f(x) = \ln x$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  al trazar sus gráficas en una pantalla común usando el rectángulo de vista  $[-1, 30]$  por  $[-1, 6]$ .

80. (a) Trazando las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \quad y \quad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de vista apropiado, demuestre que aun cuando una función logarítmica empieza más alta que una función de raíz, es finalmente superada por la función de raíz.

(b) Encuentre, aproximadas a dos lugares decimales, las soluciones de la ecuación  $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$ .

81-82 ■ Nos dan una familia de funciones. (a) Trace gráficas de la familia para  $c = 1, 2, 3$  y  $4$ . (b) ¿Cómo están relacionadas las gráficas de la parte (a)?

81.  $f(x) = \log(cx)$

82.  $f(x) = c \log x$

83-84 ■ Nos dan una función  $f(x)$ . (a) Encuentre el dominio de la función  $f$ . (b) Encuentre la función inversa de  $f$ .

83.  $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$

84.  $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

85. (a) Encuentre la inversa de la función  $f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$ .  
(b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

## APLICACIONES

- 86. Absorción de luz** Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al hacer brillar una luz a través de ella y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si sabemos la cantidad de luz que es absorbida, podemos calcular la concentración de la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles por litro) se encuentra usando la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde  $I_0$  es la intensidad de la luz incidente e  $I$  es la intensidad de la luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad  $I$  es 70% de  $I_0$ .



- 87. Determinación de la edad por carbono** La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si  $D_0$  es la cantidad original de carbono 14 y  $D$  es la cantidad restante, entonces la edad  $A$  del artefacto (en años) está dada por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad  $D$  de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original  $D_0$ .

- 88. Colonia de bacterias** Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo  $t$  (en horas) necesario para que la colonia crezca a  $N$  bacterias está dado por

$$t = 3 \frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

- 89. Inversión** El tiempo necesario para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés  $r$  capitalizado continuamente está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Encuentre el tiempo necesario para duplicar una inversión al 6%, 7% y 8%.

- 90. Carga de una batería** La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima  $C_0$ . El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga  $C$  está dado por

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde  $k$  es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería,  $k = 0.25$ . Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima  $C_0$ ?

- 91. Dificultad de una tarea** La dificultad en “alcanzar un objetivo” (por ejemplo usar el ratón para hacer clic en un ícono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia a la que está el objetivo y el tamaño de éste. De acuerdo con la Ley de Fitts, el índice de dificultad (ID) está dado por

$$ID = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde  $W$  es el ancho del objetivo y  $A$  es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un ícono de 5 mm de ancho con hacer clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso, suponga que el ratón está a 100 mm del ícono.



## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 92. Altura de la gráfica de una función logarítmica**

Suponga que la gráfica de  $y = 2^x$  está trazada en un plano de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada.

- (a) Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica es de unas 265 millas.  
 (b) Si la gráfica de  $y = \log_2 x$  se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿a qué distancia a la derecha del origen tenemos que ir antes que la altura de la curva llegue a 2 pies?

- 93. El Googolplex** Un **googol** es  $10^{100}$ , y un **googolplex** es  $10^{\text{googol}}$ . Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \quad \text{y} \quad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

- 94. Comparación de logaritmos** ¿Cuál es más grande,  $\log_{4} 17$  o  $\log_{24} 17$ ? Explique su razonamiento.

- 95. Número de dígitos de un entero** Compare  $\log 1000$  con el número de dígitos de 1000. Haga lo mismo para 10,000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1000 y 10,000? ¿Entre cuáles dos valores debe encontrarse el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos de cualquier entero positivo  $x$  es  $\lceil \log x \rceil + 1$ . (El símbolo  $\lceil n \rceil$  es la función entero mayor definida en la Sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número  $2^{100}$ ?

## 4.4 LEYES DE LOGARITMOS

- | Leyes de logaritmos ► Expansión y combinación de expresiones logarítmicas
- Fórmula para cambio de base

En esta sección estudiamos propiedades de logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones, como veremos en la Sección 4.6.

### ▼ Leyes de logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, las Leyes de Exponentes dan lugar a las Leyes de Logaritmos.

#### LEYES DE LOGARITMOS

Sea  $a$  un número positivo, con  $a \neq 1$ . Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  cualesquier números reales con  $A > 0$  y  $B > 0$ .

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

**DEMOSTRACIÓN** Hacemos uso de la propiedad  $\log_a a^x = x$  de la Sección 4.3.

**Ley 1** Sean  $\log_a A = u$  y  $\log_a B = v$ . Cuando se escriben en forma exponencial, estas cantidades se convierten en

$$a^u = A \quad \text{y} \quad a^v = B$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto,} \quad \log_a(AB) &= \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v}) \\ &= u + v = \log_a A + \log_a B \end{aligned}$$

**Ley 2** Usando la Ley 1, tenemos

$$\log_a A = \log_a \left[ \left( \frac{A}{B} \right) B \right] = \log_a \left( \frac{A}{B} \right) + \log_a B$$

$$\text{Así} \quad \log_a \left( \frac{A}{B} \right) = \log_a A - \log_a B$$

**Ley 3** Sean  $\log_a A = u$ . Entonces  $a^u = A$ , por lo que

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C \log_a A$$

#### EJEMPLO 1 | Uso de las leyes de logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe las expresiones siguientes.

(a)  $\log_4 2 + \log_4 32$

(b)  $\log_2 80 - \log_2 5$

(c)  $-\frac{1}{3} \log 8$

**SOLUCIÓN**

- (a)  $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$  Ley 1  
 $= \log_4 64 = 3$  Porque  $64 = 4^3$
- (b)  $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right)$  Ley 2  
 $= \log_2 16 = 4$  Porque  $16 = 2^4$
- (c)  $-\frac{1}{3} \log 8 = \log 8^{-1/3}$  Ley 3  
 $= \log\left(\frac{1}{2}\right)$  Propiedad de exponentes negativos  
 $\approx -0.301$  Calculadora

☞ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 7, 9 Y 11

**▼ Expansión y combinación de expresiones logarítmicas**

Las Leyes de Logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 2 | Expansión de expresiones logarítmicas**

Use las Leyes de Logaritmos para expandir estas expresiones.

- (a)  $\log_2(6x)$       (b)  $\log_5(x^3y^6)$       (c)  $\ln\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

**SOLUCIÓN**

- (a)  $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$  Ley 1
- (b)  $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$  Ley 1  
 $= 3 \log_5 x + 6 \log_5 y$  Ley 3
- (c)  $\ln\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln \sqrt[3]{c}$  Ley 2  
 $= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$  Ley 1  
 $= \ln a + \ln b - \frac{1}{3} \ln c$  Ley 3

☞ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 19, 21 Y 33



Las Leyes de Logaritmos también nos permiten invertir el proceso de expansión que se hizo en el Ejemplo 2. Es decir, podemos escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinar* expresiones logarítmicas, está ilustrado en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 3 | Combinar expresiones logarítmicas**

Combine  $3 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1)$  en un solo logaritmo.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned} 3 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1) &= \log x^3 + \log(x + 1)^{1/2} & \text{Ley 3} \\ &= \log(x^3(x + 1)^{1/2}) & \text{Ley 1} \end{aligned}$$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 47

**EJEMPLO 4 | Combinar expresiones logarítmicas**

Combine  $3 \ln s + \frac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1)$  en un solo logaritmo.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned}
 3 \ln s + \frac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1) &= \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2 + 1)^4 & \text{Ley 3} \\
 &= \ln(s^3 t^{1/2}) - \ln(t^2 + 1)^4 & \text{Ley 1} \\
 &= \ln\left(\frac{s^3 \sqrt{t}}{(t^2 + 1)^4}\right) & \text{Ley 2}
 \end{aligned}$$

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 49**

**Advertencia** Aun cuando las Leyes de Logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o un cociente, *no hay regla correspondiente para el logaritmo de una suma o una diferencia*. Por ejemplo,



$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

De hecho, sabemos que el lado derecho es igual a  $\log_a(xy)$ . Del mismo modo, no simplifique incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,



$$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right) \quad \text{y} \quad (\log_2 x)^3 \neq 3 \log_2 x$$

Se usan funciones logarítmicas para modelar diversas situaciones donde interviene el comportamiento humano. Uno de éstos es la rapidez con la que olvidamos cosas que hemos aprendido. Por ejemplo, si usted aprende álgebra a cierto nivel (por ejemplo 90% en un examen) y no usa álgebra durante un tiempo, ¿cuánto retendrá después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley descrita en el ejemplo siguiente.

**EJEMPLO 5 | La ley de olvido**

Olvidar lo que hemos aprendido depende de cuánto tiempo hace que lo aprendimos.

Si una tarea se aprende a cierto nivel  $P_0$ , después de cierto tiempo  $t$  el nivel de recordatorio  $P$  satisface la ecuación

$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1)$$

donde  $c$  es una constante que depende del tipo de tarea y  $t$  se mide en meses.

(a) Despeje  $P$ .

(b) Si su calificación en el examen de historia es 90, ¿qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? (Suponga que  $c = 0.2$ .)

**SOLUCIÓN**

(a) Primero combinamos el lado derecho.

$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1) \quad \text{Ecuación dada}$$

$$\log P = \log P_0 - \log(t + 1)^c \quad \text{Ley 3}$$

$$\log P = \log \frac{P_0}{(t + 1)^c} \quad \text{Ley 2}$$

$$P = \frac{P_0}{(t + 1)^c} \quad \text{Porque log es biunívoco}$$

(b) Aquí  $P_0 = 90$ ,  $c = 0.2$  y  $t$  se mide en meses.

$$\text{En dos meses: } t = 2 \quad \text{y} \quad P = \frac{90}{(2 + 1)^{0.2}} \approx 72$$

$$\text{En un año: } t = 12 \quad \text{y} \quad P = \frac{90}{(12 + 1)^{0.2}} \approx 54$$

Sus calificaciones esperadas después de dos meses y un año son 72 y 54, respectivamente.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69**

## ▼ Fórmula para cambio de base

Para algunos propósitos encontramos útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que nos dan  $\log_a x$  y deseamos hallar  $\log_b x$ . Sea

$$y = \log_b x$$

Escribimos esto en forma exponencial y tomamos el logaritmo, con base  $a$ , de cada lado.

$$\begin{array}{ll} b^y = x & \text{Forma exponencial} \\ \log_a(b^y) = \log_a x & \text{Tome } \log_a \text{ de cada lado} \\ y \log_a b = \log_a x & \text{Ley 3} \\ y = \frac{\log_a x}{\log_a b} & \text{Divida entre } \log_a b \end{array}$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Podemos escribir la Fórmula para Cambio para Base como

$$\log_b x = \left( \frac{1}{\log_a b} \right) \log_a x$$

Entonces  $\log_a x$  es sólo un múltiplo constante de  $\log_b x$ ; la constante es  $\frac{1}{\log_a b}$ .

### FÓRMULA PARA CAMBIO DE BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si ponemos  $x = a$ , entonces  $\log_a a$ , y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora podemos evaluar un logaritmo a *cualquier* base con el uso de la Fórmula para Cambio de Base, para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales y luego usar calculadora.

### EJEMPLO 6 | Evaluar logaritmos con la Fórmula para Cambio de Base

Use la Fórmula para Cambio de Base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, aproximado a cinco lugares decimales.

- (a)  $\log_8 5$       (b)  $\log_9 20$

#### SOLUCIÓN

- (a) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con  $b = 8$  y  $a = 10$ :

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

- (b) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con  $b = 9$  y  $a = e$ :

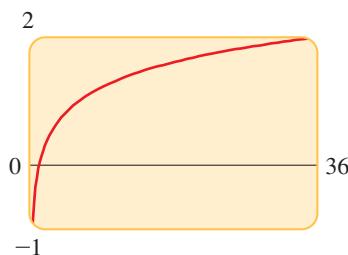
$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

#### AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 55 Y 57

### EJEMPLO 7 | Usar la Fórmula para Cambio de Base para graficar una función logarítmica



Use calculadora graficadora para graficar  $f(x) = \log_6 x$ .



**FIGURA 1**  $f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$

**SOLUCIÓN** Las calculadoras no tienen tecla para  $\log_6$ , de modo que usamos la Fórmula para Cambio de Base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Como las calculadoras tienen una tecla **LN**, podemos ingresar esta nueva forma de la función y graficarla. La gráfica se muestra en la Figura 1.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 63

## 4.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

- El logaritmo de un producto de dos números es igual que la \_\_\_ de los logaritmos de estos números. Por tanto,  $\log_5(25 \cdot 125) = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$ .
  - El logaritmo de un cociente de dos números es igual que la \_\_\_ de los logaritmos de estos números. Por tanto,  $\log_5\left(\frac{25}{125}\right) = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}.$
  - El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual que la potencia \_\_\_ el logaritmo del número. Por tanto,  $\log_5(25^{10}) = \underline{\hspace{2cm}}.$
  - (a) Podemos expandir  $\left(\frac{x^2 y}{z}\right)$  para obtener \_\_\_\_\_.  
(b) Podemos combinar  $2 \log x + \log y - \log z$  para obtener \_\_\_\_\_.  
5. La mayor parte de calculadoras pueden hallar logaritmos con base \_\_\_ y base \_\_\_. Para hallar logaritmos con bases diferentes, usamos la Fórmula \_\_\_\_\_. Para Hallar  $\log_7 12$ , escribimos
- $$\log_7 12 = \frac{\log \underline{\hspace{2cm}}}{\log \underline{\hspace{2cm}}} = \underline{\hspace{2cm}}$$
6. ¿Verdadero o falso? Obtenemos la misma respuesta si hacemos el cálculo del Ejercicio 5 usando  $\ln$  en lugar de  $\log$ .

### HABILIDADES

7-18 ■ Evalúe la expresión.

7.  $\log_3 \sqrt{27}$
8.  $\log_2 160 - \log_2 5$
9.  $\log 4 + \log 25$
10.  $\log \frac{1}{\sqrt{1000}}$
11.  $\log_4 192 - \log_4 3$
12.  $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$
13.  $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
14.  $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$
15.  $\log_4 16^{100}$
16.  $\log_2 8^{33}$
17.  $\log(\log 10^{10,000})$
18.  $\ln(\ln e^{e^{200}})$

19-44 ■ Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión.

19.  $\log_2(2x)$
20.  $\log_3(5y)$
21.  $\log_2(x(x - 1))$
22.  $\log_5 \frac{x}{2}$
23.  $\log 6^{10}$
24.  $\ln \sqrt{z}$
25.  $\log_2(AB^2)$
26.  $\log_6 \sqrt[4]{17}$
27.  $\log_3(x \sqrt{y})$
28.  $\log_2(xy)^{10}$
29.  $\log_5 \sqrt[3]{x^2 + 1}$
30.  $\log_a \left( \frac{x^2}{yz^3} \right)$
31.  $\ln \sqrt{ab}$
32.  $\ln \sqrt[3]{3r^2}$
33.  $\log \left( \frac{x^3 y^4}{z^6} \right)$
34.  $\log \left( \frac{a^2}{b^4 \sqrt{c}} \right)$
35.  $\log_2 \left( \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$
36.  $\log_5 \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$
37.  $\ln \left( x \sqrt{\frac{y}{z}} \right)$
38.  $\ln \frac{3x^2}{(x + 1)^{10}}$
39.  $\log \sqrt[4]{x^2 + y^2}$
40.  $\log \left( \frac{x}{\sqrt[3]{1 - x}} \right)$
41.  $\log \sqrt{\frac{x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^3 - 7)^2}}$
42.  $\log \sqrt{x \sqrt{y \sqrt{z}}}$
43.  $\ln \left( \frac{x^3 \sqrt{x - 1}}{3x + 4} \right)$
44.  $\log \left( \frac{10^x}{x(x^2 + 1)(x^4 + 2)} \right)$

45-54 ■ Use las Leyes de Logaritmos para combinar la expresión.

45.  $\log_3 5 + 5 \log_3 2$
46.  $\log 12 + \frac{1}{2} \log 7 - \log 2$
47.  $\log_2 A + \log_2 B - 2 \log_2 C$
48.  $\log_5(x^2 - 1) - \log_5(x - 1)$
49.  $4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2 + 1) + 2 \log(x - 1)$
50.  $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2 \ln c$
51.  $\ln 5 + 2 \ln x + 3 \ln(x^2 + 5)$
52.  $2(\log_5 x + 2 \log_5 y - 3 \log_5 z)$

53.  $\frac{1}{3} \log(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

54.  $\log_a b + c \log_a d - r \log_a s$

55-62 ■ Use la Regla para Cambio de Base y una calculadora para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

55.  $\log_2 5$

57.  $\log_3 16$

59.  $\log_7 2.61$

61.  $\log_4 125$

63. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que



$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

A continuación use este dato para trazar la gráfica de la función  $f(x) = \log_3 x$ .

64. Trace gráficas de la familia de funciones  $y = \log_a x$  para  $a = 2, e, 5$  y  $10$  en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista  $[0, 5]$  por  $[-3, 3]$ . ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?
65. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

66. Simplifique:  $(\log_2 5)(\log_5 7)$

67. Demuestre que  $-\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ .

## APLICACIONES

68. **Olvido** Use la Ley de Olvido (Ejemplo 5) para estimar la calificación de un estudiante, en un examen de biología, dos años después que obtuvo una calificación de  $80$  en un examen sobre el mismo material. Suponga que  $c = 0.3$  y  $t$  se mide en meses.

69. **Distribución de riqueza** Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país es propiedad de unos cuantos miembros de la población. El **Principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k \log W$$

donde  $W$  es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y  $P$  es el número de personas de la población que tiene ese dinero.

- (a) De esa ecuación, despeje  $P$ .  
 (b) Suponga que  $k = 2.1$ ,  $c = 8000$ , y  $W$  se mide en millones de dólares. Use la parte (a) para hallar el número de personas que tienen  $\$2$  millones de dólares o más. ¿Cuántas personas tienen  $\$10$  millones de dólares o más?

70. **Diversidad** Algunos biólogos modelan el número de especies  $S$  en un área fija  $A$  (por ejemplo una isla) con la relación especie-área

$$\log S = \log c + k \log A$$

donde  $c$  y  $k$  son constantes positivas que dependen del tipo de especie y hábitat.

- (a) De la ecuación, despeje  $S$ .

- (b) Use la parte (a) para demostrar que si  $k = 3$ , entonces duplicar el área aumenta ocho veces el número de especies.



71. **Magnitud de estrellas** La magnitud  $M$  de una estrella es una medida del brillo que una estrella parece tener a la vista del hombre. Está definida como

$$M = -2.5 \log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde  $B$  es el brillo real de la estrella y  $B_0$  es una constante.

- (a) Expanda el lado derecho de la ecuación.  
 (b) Use la parte (a) para demostrar que cuanto más brillante sea una estrella, menor es su magnitud.  
 (c) Betelgeuse es unas  $100$  veces más brillante que Albiero. Use la parte (a) para demostrar que Betelgeuse es  $5$  magnitudes menos brillante que Albiero.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

72. **Verdadero o falso?** Discuta cada una de las ecuaciones siguientes y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore valores de las variables para las que cualquier término no esté definido.)

(a)  $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

(b)  $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

(c)  $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2 \log_5 b$

(d)  $\log 2^z = z \log 2$

(e)  $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

(f)  $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

(g)  $(\log_2 7)^x = x \log_2 7$

(h)  $\log_a a^a = a$

(i)  $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

(j)  $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

- 73. Encuentre el error** ¿Qué está mal en el siguiente argumento?

$$\begin{aligned}\log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01\end{aligned}$$

- 74. Desplazamiento, contracción y alargamiento de gráficas de funciones** Sea  $f(x) = x^2$ . Demuestre que  $f(2x) = 4f(x)$  y explique la forma en que esto demuestra que la contracción de la gráfica de  $f$ , horizontalmente, tiene el mismo efecto que alargarla verticalmente. A continuación use las identidades  $e^{2+x} = e^2e^x$  y  $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$  para demostrar que para  $g(x) = e^x$  un desplazamiento horizontal es igual que un alargamiento vertical y para  $h(x) = \ln x$  una contracción horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

## 4.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

| Ecuaciones exponenciales ► Ecuaciones logarítmicas ► Interés compuesto

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas aplicados.

### ▼ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable aparece en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable  $x$  presenta una dificultad porque está en el exponente. Para resolver esta dificultad, tomamos el logaritmo de cada lado y luego usamos las Leyes de Logaritmos para “bajar  $x$ ” del exponente.

$$\begin{aligned}2^x &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \ln 2^x &= \ln 7 && \text{Tome ln de cada lado} \\ x \ln 2 &= \ln 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despeje } x \\ &\approx 2.807 && \text{Calculadora}\end{aligned}$$

Recuerde que la Ley 3 de las Leyes de Logaritmos dice que  $\log_a A^c = C \log_a A$ .

El método que usamos para resolver  $2^x = 7$  es típico de cómo resolvemos ecuaciones exponenciales en general.

#### GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aíslle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y a continuación use las Leyes de Logaritmos para “bajar el exponente”.
3. Despeje la variable.

#### EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación  $3^{x+2} = 7$ , redondeada a seis lugares decimales.

**SOLUCIÓN** Tomamos el logaritmo común de cada lado y usamos la Ley 3.

$$3^{x+2} = 7 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$\log(3^{x+2}) = \log 7 \quad \text{Tome log de cada lado}$$

$$(x+2)\log 3 = \log 7 \quad \text{Ley 3 (bajar exponente)}$$

$$x+2 = \frac{\log 7}{\log 3} \quad \text{Divida entre log 3}$$

$$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2 \quad \text{Reste 2}$$

$$\approx -0.228756 \quad \text{Calculadora}$$

Podríamos haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Sustituyendo  $x = -0.228756$  en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad \checkmark$$

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 7**

**EJEMPLO 2** | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación  $8e^{2x} = 20$ .

**SOLUCIÓN** Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$8e^{2x} = 20 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$e^{2x} = \frac{20}{8} \quad \text{Divida entre 8}$$

$$\ln e^{2x} = \ln 2.5 \quad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$2x = \ln 2.5 \quad \text{Propiedad de ln}$$

$$x = \frac{\ln 2.5}{2} \quad \text{Divida entre 2}$$

$$\approx 0.458 \quad \text{Calculadora}$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Sustituyendo  $x = 0.458$  en la ecuación original y utilizando una calculadora, tenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad \checkmark$$

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9**

**EJEMPLO 3** | Resolver una ecuación exponencial de forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación  $e^{3-2x} = 4$  de manera algebraica y gráfica.

**SOLUCIÓN 1: Algebraica**

Como la base del término exponencial es  $e$ , usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$e^{3-2x} = 4 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln(e^{3-2x}) = \ln 4 \quad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$3 - 2x = \ln 4 \quad \text{Propiedad de ln}$$

$$-2x = -3 + \ln 4 \quad \text{Reste 3}$$

$$x = \frac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 \quad \text{Multiplique por } \frac{1}{2}$$

Es necesario verificar que esta respuesta satisface la ecuación original.

5

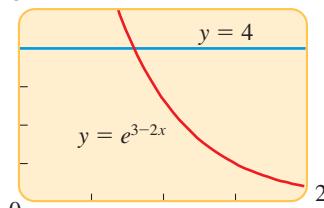


FIGURA 1

Si hacemos  $w = e^x$ , obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

## SOLUCIÓN 2: Gráfica

Graficamos las ecuaciones  $y = e^{3-2x}$  y  $y = 4$  en el mismo rectángulo de vista como en la Figura 1. Las soluciones se presentan donde las gráficas se intersecan. Si hacemos acercamiento (zoom) en el punto de intersección de las dos gráficas, vemos que  $x \approx 0.81$ .

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11

## EJEMPLO 4 | Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación  $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ .

**SOLUCIÓN** Para aislar el término exponencial, factorizamos.

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \quad \text{Ley de Exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \quad \text{Factorice (un cuadrático en } e^x)$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad e^x + 2 = 0 \quad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

$$e^x = 3 \quad e^x = -2$$

La ecuación  $e^x = 3$  lleva a  $x = \ln 3$ . Pero la ecuación  $e^x = -2$  no tiene solución porque  $e^x > 0$  para toda  $x$ . Entonces,  $x = \ln 3 \approx 1.0986$  es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisface la ecuación original.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

## EJEMPLO 5 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación  $3xe^x + x^2e^x = 0$ .

**SOLUCIÓN** Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \quad \text{Factorizamos factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \quad \text{Dividimos entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0)$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \quad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

### VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$ :

$$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0 \quad \checkmark$$

$x = -3$ :

$$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3} \\ = -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0 \quad \checkmark$$

Entonces las soluciones son  $x = 0$  y  $x = -3$ .

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 33

**La determinación de la edad por radiocarbono** es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 ( $^{14}\text{C}$ ), con una vida media de unos 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre  $^{14}\text{C}$  y  $^{12}\text{C}$  no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar  $^{14}\text{C}$  y la cantidad de  $^{14}\text{C}$  en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de  $^{14}\text{C}$  que tenga.

Por ejemplo, si el hueso de un borrico que murió hace  $t$  años contiene 73% del  $^{14}\text{C}$  que tenga uno vivo, entonces por la fórmula para desintegración radiactiva (Sección 4.6),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para hallar  $t \approx 2600$ , de modo que el hueso tiene unos 2600 años de antigüedad.



## ▼ Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar  $x$ , escribimos la ecuación en forma exponencial

$$x + 2 = 2^5 \quad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \quad \text{Despeje } x$$

Otra forma de ver el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \quad \text{Eleve 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \quad \text{Propiedad de logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \quad \text{Despeje } x$$

El método empleado para resolver este sencillo problema es típico. Resumimos los pasos como sigue:

### GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aíslle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

### EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación, despeje  $x$ .

(a)  $\ln x = 8$       (b)  $\log_2(25 - x) = 3$

#### SOLUCIÓN

(a)  $\ln x = 8 \quad \text{Ecuación dada}$   
 $x = e^8 \quad \text{Forma exponencial}$

Por lo tanto,  $x = e^8 \approx 2981$ .

También podemos resolver este problema en otra forma:

$$\begin{aligned} \ln x &= 8 && \text{Ecuación dada} \\ e^{\ln x} &= e^8 && \text{Eleve } e \text{ a cada lado} \\ x &= e^8 && \text{Propiedad de } \ln \end{aligned}$$

- (b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\begin{aligned} \log_2(25 - x) &= 3 && \text{Ecuación dada} \\ 25 - x &= 2^3 && \text{Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)} \\ 25 - x &= 8 \end{aligned}$$

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si  $x = 17$ , tenemos

$$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3 \quad \checkmark$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

**EJEMPLO 7** | Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación  $4 + 3 \log(2x) = 16$ .

**SOLUCIÓN** Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$\begin{array}{ll}
 4 + 3 \log(2x) = 16 & \text{Ecuación dada} \\
 3 \log(2x) = 12 & \text{Reste 4} \\
 \log(2x) = 4 & \text{Divida entre 3} \\
 2x = 10^4 & \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\
 x = 5000 & \text{Divida entre 2}
 \end{array}$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Si  $x = 5000$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 4 + 3 \log 2(5000) &= 4 + 3 \log 10,000 \\
 &= 4 + 3(4) \\
 &= 16 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 43

**EJEMPLO 8** | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación  $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$ .

**SOLUCIÓN 1:** Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos, usando las Leyes de Logaritmos.

$$\begin{array}{ll}
 \log[(x + 2)(x - 1)] = 1 & \text{Ley 1} \\
 (x + 2)(x - 1) = 10 & \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\
 x^2 + x - 2 = 10 & \text{Expanda lado izquierdo} \\
 x^2 + x - 12 = 0 & \text{Reste 10} \\
 (x + 4)(x - 3) = 0 & \text{Factorice} \\
 x = -4 \quad \text{o} \quad x = 3 &
 \end{array}$$

Verificamos estas potenciales soluciones en la ecuación original y encontramos que  $x = -4$  no es una solución (porque los logaritmos de números negativos no están definidos), pero  $x = 3$  es una solución. (Vea *Verifique sus respuestas*.)

**SOLUCIÓN 2:** Gráfica

Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

A continuación graficamos

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la Figura 2. Las soluciones son los puntos de intersección  $x$  de la gráfica. Entonces, la única solución es  $x \approx 3$ .

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 49

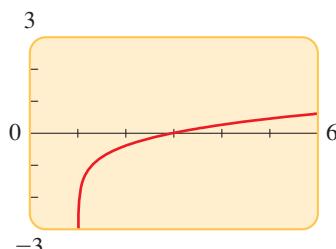


FIGURA 2

En el Ejemplo 9 no es posible aislar  $x$  algebraicamente, de modo que debemos resolver gráficamente la ecuación.

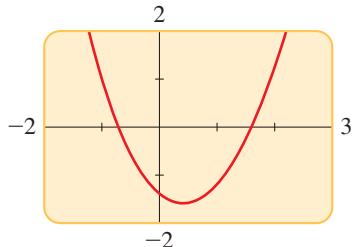
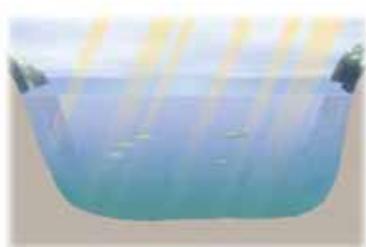


FIGURA 3



La intensidad de la luz en un lago disminuye con la profundidad.

### EJEMPLO 9 | Resolver gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación  $x^2 = 2 \ln(x + 2)$ .

**SOLUCIÓN** Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación.

$$x^2 - 2 \ln(x + 2) = 0$$

Entonces graficamos

$$y = x^2 - 2 \ln(x + 2)$$

como en la Figura 3. Las soluciones son los puntos de intersección  $x$  de la gráfica. Si hacemos zoom en los puntos de intersección  $x$ , vemos que hay dos soluciones

$$x \approx -0.71 \quad y \quad x \approx 1.60$$

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 59

Se usan ecuaciones logarítmicas para determinar la cantidad de luz que llega a diversas profundidades en un lago. (Esta información ayuda a biólogos a determinar los tipos de fauna que un lago puede soportar.) Cuando pasa luz por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), parte de la luz es absorbida. Es fácil ver que cuanto más turbia sea el agua, más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material está descrita en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 10 | Transparencia de un lago

Si  $I_0$  e  $I$  denotan la intensidad de luz antes y después de pasar por un material y  $x$  es la distancia (en pies) que la luz se desplaza en el material, entonces, de acuerdo con la **Ley de Beer-Lambert**,

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde  $k$  es una constante que depende del tipo de material.

(a) Despeje  $I$  de la ecuación

(b) Para cierto lago,  $k = 0.025$ , y la intensidad de la luz es  $I_0 = 14$  lumen (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

**SOLUCIÓN**

(a) Primero aislamos el término logarítmico.

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x \quad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx \quad \text{Multiplique por } -k$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx} \quad \text{Forma exponencial}$$

$$I = I_0 e^{-kx} \quad \text{Multiplique por } I_0$$

(b) Encontramos  $I$  usando la fórmula de la parte (a).

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-kx} && \text{De la parte (a)} \\ &= 14 e^{(-0.025)(20)} && I_0 = 14, k = 0.025, x = 20 \\ &\approx 8.49 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es alrededor de 8.5 lm.

☞ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 85

## ▼ Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para interés que hallamos en la Sección 4.1. Si un principal  $P$  se invierte a una tasa de interés  $r$  durante un tiempo de  $t$  años, entonces la cantidad  $A$  de la inversión está dada por

$$A = P(1 + r) \quad \text{Interés simple (para un año)}$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad \text{Interés capitalizado } n \text{ veces por año}$$

$$A(t) = Pe^{rt} \quad \text{Interés capitalizado continuamente}$$

Podemos usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en aumentar a una cantidad dada.

### EJEMPLO 11 | Hallar el tiempo para que una inversión se duplique

Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 5% al año. Encuentre el tiempo necesario para que el dinero se duplique si el interés se capitaliza de acuerdo con el siguiente método.

(a) Semestralmente

(b) Continuamente

#### SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula para interés compuesto con  $P = \$5000$ ,  $A(t) = \$10,000$ ,  $r = 0.05$  y  $n = 2$  y de la ecuación exponencial resultante despejamos  $t$ .

$$\begin{aligned} 5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} &= 10,000 & P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} &= A \\ (1.025)^{2t} &= 2 & \text{Divida entre 5000} \\ \log 1.025^{2t} &= \log 2 & \text{Tome log de cada lado} \\ 2t \log 1.025 &= \log 2 & \text{Ley 3 (baje el exponente)} \\ t &= \frac{\log 2}{2 \log 1.025} & \text{Divida entre } 2 \log 1.025 \\ t &\approx 14.04 & \text{Calculadora} \end{aligned}$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

(b) Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con  $P = \$5000$ ,  $A(t) = \$10,000$  y  $r = 0.05$  y de la ecuación exponencial resultante despejamos  $t$ .

$$\begin{aligned} 5000e^{0.05t} &= 10,000 & Pe^{rt} &= A \\ e^{0.05t} &= 2 & \text{Divida entre 5000} \\ \ln e^{0.05t} &= \ln 2 & \text{Tome ln de cada lado} \\ 0.05t &= \ln 2 & \text{Propiedad de ln} \\ t &= \frac{\ln 2}{0.05} & \text{Divida entre 0.05} \\ t &\approx 13.86 & \text{Calculadora} \end{aligned}$$

El dinero se duplicará en 13.86 años.

### AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 75

### EJEMPLO 12 | Tiempo necesario para crecer una inversión

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a \$4000 si el interés se capitaliza continuamente.

**SOLUCIÓN** Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con  $P = \$1000$ ,  $A(t) = \$4000$  y  $r = 0.04$  y de la ecuación exponencial resultante se despeja  $t$ .

$$\begin{aligned} 1000e^{0.04t} &= 4000 & Pe^{rt} &= A \\ e^{0.04t} &= 4 & \text{Divida entre 1000} \\ 0.04t &= \ln 4 & \text{Tome ln de cada lado} \\ t &= \frac{\ln 4}{0.04} & \text{Divida entre 0.04} \\ t &\approx 34.66 & \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La cantidad será \$4000 en 34 años y 8 meses.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 77**



## 4.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial  $2e^x = 50$ .

(a) Primero, aislamos  $e^x$  para obtener la ecuación equivalente \_\_\_\_.

(b) A continuación, tomamos  $\ln$  de cada lado para obtener la ecuación equivalente \_\_\_\_.

(c) Ahora usamos una calculadora para hallar  $x =$  \_\_\_\_.

2. Resolvamos la ecuación logarítmica

$$\log 3 + \log(x - 2) = \log x.$$

(a) Primero, combinamos los logaritmos para obtener la ecuación equivalente \_\_\_\_.

(b) A continuación, escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente \_\_\_\_.

(c) Ahora encontramos  $x =$  \_\_\_\_.

25.  $\frac{50}{1 + e^{-x}} = 4$

26.  $\frac{10}{1 + e^{-x}} = 2$

27.  $100(1.04)^{2t} = 300$

28.  $(1.00625)^{12t} = 2$

29-36 ■ Resuelva la ecuación.

29.  $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

30.  $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

31.  $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

32.  $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

33.  $x^2e^x - 2^x = 0$

34.  $x^210^x - x10^x = 2(10^x)$

35.  $4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = 0$

36.  $x^2e^x + xe^x - e^x = 0$

37-54 ■ De la ecuación logarítmica despeje  $x$ .

37.  $\ln x = 10$

38.  $\ln(2 + x) = 1$

39.  $\log x = -2$

40.  $\log(x - 4) = 3$

41.  $\log(3x + 5) = 2$

42.  $\log_3(2 - x) = 3$

43.  $4 - \log(3 - x) = 3$

44.  $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

45.  $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

46.  $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

47.  $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

48.  $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

49.  $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

50.  $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$

51.  $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

52.  $\log x + \log(x - 3) = 1$

53.  $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

54.  $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

55. ¿Para qué valor de  $x$  es verdadero lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

56. ¿Para qué valor de  $x$  es verdadero que  $(\log x)^3 = 3 \log x$ ?

57. Despeje  $x$ :  $2^{2/\log_3 x} = \frac{1}{16}$

58. Despeje  $x$ :  $\log_2(\log_3 x) = 4$

### HABILIDADES

3-28 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

3.  $10^x = 25$

4.  $10^{-x} = 4$

5.  $e^{-2x} = 7$

6.  $e^{3x} = 12$

7.  $2^{1-x} = 3$

8.  $3^{2x-1} = 5$

9.  $3e^x = 10$

10.  $2e^{12x} = 17$

11.  $e^{1-4x} = 2$

12.  $4(1 + 10^{5x}) = 9$

13.  $4 + 3^{5x} = 8$

14.  $2^{3x} = 34$

15.  $8^{0.4x} = 5$

16.  $3^{x/14} = 0.1$

17.  $5^{-x/100} = 2$

18.  $e^{3-5x} = 16$

19.  $e^{2x+1} = 200$

20.  $(\frac{1}{4})^x = 75$

21.  $5^x = 4^{x+1}$

22.  $10^{1-x} = 6^x$

23.  $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

24.  $7^{x/2} = 5^{1-x}$

-  **59-66** Use calculadora graficadora para hallar todas las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.
- 59.**  $\ln x = 3 - x$       **60.**  $\log x = x^2 - 2$   
**61.**  $x^3 - x = \log(x + 1)$       **62.**  $x = \ln(4 - x^2)$   
**63.**  $e^x = -x$       **64.**  $2^{-x} = x - 1$   
**65.**  $4^{-x} = \sqrt{x}$       **66.**  $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$
- 67-70** Resuelva la desigualdad.
- 67.**  $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$
- 68.**  $3 \leq \log_2 x \leq 4$
- 69.**  $2 < 10^x < 5$       **70.**  $x^2 e^x - 2e^x < 0$
- 71-74** Encuentre la función inversa de  $f$ .
- 71.**  $f(x) = 2^{2x}$       **72.**  $f(x) = 3^{x+1}$   
**73.**  $f(x) = \log_2(x - 1)$       **74.**  $f(x) = \log 3x$

## APLICACIONES

-  **75. Interés compuesto** Un hombre invierte \$5000 en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.
- (a) Encuentre la cantidad después de 3 años.  
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?
- 76. Interés compuesto** Una mujer invierte \$6500 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.
- (a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?  
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea \$8000?
-  **77. Interés compuesto** Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de \$5000 crezca a \$8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.
- 78. Interés compuesto** Nancy desea invertir \$4000 en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tiempo debe ella escojer para ahorrar una cantidad de \$5000?
- 79. Duplicar una inversión** ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de \$1000 en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?
- 80. Tasa de interés** Una suma de \$1000 se invirtió durante 4 años, y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a \$1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?
- 81. Desintegración radiactiva** Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de  $t$  días está dada por  $m(t) = 15e^{-0.087t}$ , donde  $m(t)$  se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?
- 82. Paracaidismo** La velocidad de un paracaidista  $t$  segundos después de saltar está dada por  $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$ . ¿Después de cuántos segundos será de 70 pies/s la velocidad?
- 83. Población de peces** En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función
- $$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$
- donde  $P$  es el número de peces en miles y  $t$  se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.
- (a) Encuentre la población de peces después de 3 años.  
(b) ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5000?
- 84. Transparencia de un lago** Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la “transparencia” del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad  $x$  está dada por
- $$I = 10e^{-0.008x}$$
- donde  $I$  se mide en lumen y  $x$  en pies.
- (a) Encuentre la intensidad  $I$  a una profundidad de 30 pies.  
(b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a  $I = 5$ ?



-  **85. Presión atmosférica** La presión atmosférica  $P$  (en kilopascals, kPa) a una altitud  $h$  (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

donde  $k = 7$  y  $P_0 = 100$  kPa son constantes.

- (a) De la ecuación, despeje  $P$ .  
(b) Use la parte (a) para hallar la presión  $P$  a una altitud de 4 km.

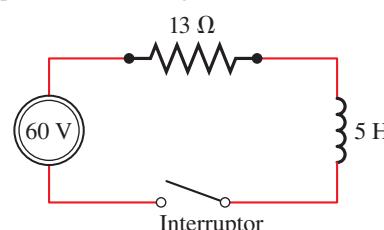
- 86. Enfriamiento de un motor** Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20°F al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220°F). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura  $T$  del motor  $t$  minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

- (a) De la ecuación, despeje  $T$ .  
(b) Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos ( $t = 20$ ).

- 87. Circuitos eléctricos** Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms ( $\Omega$ ), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente  $I = I(t)$  (en amperes, A)  $t$  segundos después de cerrar el interruptor es  $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$ .

- (a) Use la ecuación para expresar el tiempo  $t$  como función de la corriente  $I$ .  
(b) ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?



## 10.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones ► Método de sustitución  
 ► Método por eliminación ► Método gráfico ► El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas ► Modelado con sistemas lineales

### ▼ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

La gráfica de una ecuación lineal es una recta (vea Sección 1.10).

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Veamos a continuación un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que  $x = 3$  y  $y = 1$  es una solución de este sistema.

#### Ecuación 1

$$2x - y = 5$$

$$2(3) - 1 = 5 \quad \checkmark$$

#### Ecuación 2

$$x + 4y = 7$$

$$3 + 4(1) = 7 \quad \checkmark$$

La solución también se puede escribir como el par ordenado  $(3, 1)$ .

Observe que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea Figura 1). Como la solución  $(3, 1)$  satisface cada una de las ecuaciones, el punto  $(3, 1)$  se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

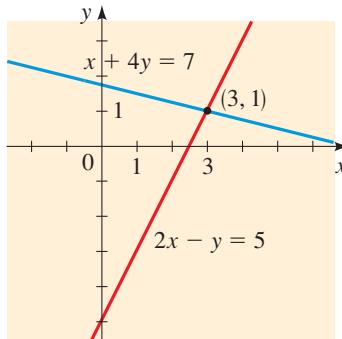


FIGURA 1

### ▼ Método de sustitución

En el **método de sustitución** empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita. El recuadro siguiente describe el procedimiento.

#### MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

- 1. Despejar una incógnita.** Escoja una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra incógnita.
- 2. Sustituir.** Sustituya la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación despeje esa incógnita.
- 3. Sustituir a la inversa.** En la expresión hallada en el Paso 1, sustituya el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

**EJEMPLO 1** | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Despejar una incógnita. Despejamos  $y$  en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \quad \text{Despeje } y \text{ en la Ecuación 1}$$

**Sustituir.** A continuación sustituimos  $y$  en la segunda ecuación y despejamos  $x$ .

$$3x + 4(1 - 2x) = 14 \quad \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la Ecuación 2}$$

$$3x + 4 - 8x = 14 \quad \text{Expanda}$$

$$-5x + 4 = 14 \quad \text{Simplifique}$$

$$-5x = 10 \quad \text{Reste 4}$$

$$x = -2 \quad \text{Despeje } x$$

**Sustitución.** A continuación sustituimos  $x = -2$  en la ecuación  $y = 1 - 2x$ .

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \quad \text{Sustitución}$$

Entonces,  $x = -2$  y  $y = 5$ , de modo que la solución es el par ordenado  $(-2, 5)$ . La Figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto  $(-2, 5)$ .

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$$x = -2, y = 5:$$

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \quad \checkmark$$

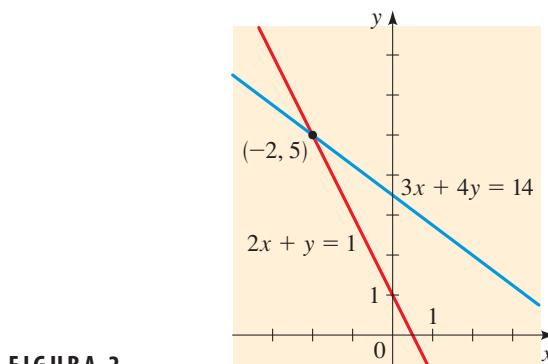


FIGURA 2

**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5**

**▼ Método por eliminación**

Para resolver un sistema usando el **método de eliminación**, tratamos de combinar las ecuaciones usando sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.

**MÉTODO POR ELIMINACIÓN**

- Ajustar los coeficientes.** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
- Sumar las ecuaciones.** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita  $y$ , y, a continuación, despeje la incógnita restante.
- Sustituir a la inversa.** En una de las ecuaciones originales, sustituya el valor hallado en el Paso 2 y despeje la incógnita restante.

**EJEMPLO 2** | Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Como los coeficientes de los términos en  $y$  son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar  $y$ .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & & \text{Sistema} \\ \hline 4x & = 16 & \text{Sume} \\ x & = 4 & \text{Despeje } x \end{array}$$

A continuación sustituimos  $x = 4$  en una de las ecuaciones originales y despejamos  $y$ . Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 2 & & \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y = 2 & & \text{Sustituya } x = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ -2y = -2 & & \text{Reste 4} \\ y = 1 & & \text{Despeje } y \end{array}$$

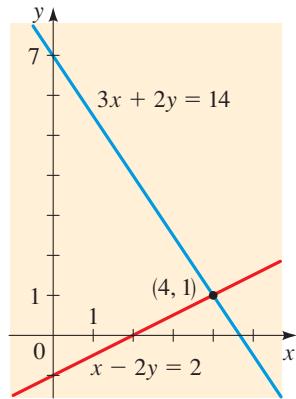


FIGURA 3

La solución es  $(4, 1)$ . La Figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto  $(4, 1)$ .

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9** 

### ▼ Método gráfico



En el **método gráfico** usamos calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

#### MÉTODO GRÁFICO

- Graficar cada ecuación.** Exprese cada ecuación en una forma apropiada para la calculadora graficadora para despejar  $y$  como función de  $x$ . Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
- Hallar los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas  $x$  y  $y$  de los puntos de intersección.

#### LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

##### Predicción del clima



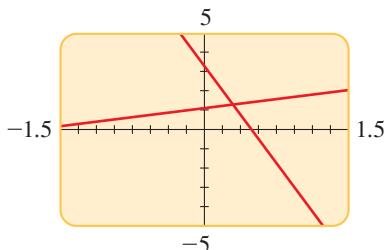
© Rachel Epstein/Photo Edit

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que pronosticar el clima de mañana. Investigan modelos del clima a largo plazo, el agotamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. No obstante, el pronóstico diario del clima es todavía una parte importante de la meteorología; su valor es medido por las innumerables vidas humanas salvadas cada año por medio de un pronóstico preciso de huracanes, ventiscas

y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo xx unos matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aun cuando este modelo funcionaba en principio, era imposible pronosticar modelos futuros con él por la dificultad para medir con precisión todas las variables y resolver todas las ecuaciones. Hoy en día, nuevos modelos matemáticos, combinados con simulaciones computarizadas de alta velocidad y mejores datos, han mejorado en gran medida el pronóstico del clima y con ello se han evitado numerosos desastres económicos y pérdidas de vida. Los matemáticos de la National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) están continuamente investigando mejores métodos para el pronóstico del clima.

**EJEMPLO 3** | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

**FIGURA 4**

$$\begin{cases} 1.35x - 2.13y = -2.36 \\ 2.16x + 0.32y = 1.06 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Despejando  $y$  en términos de  $x$ , obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0.63x + 1.11 \\ y = -6.75x + 3.31 \end{cases}$$

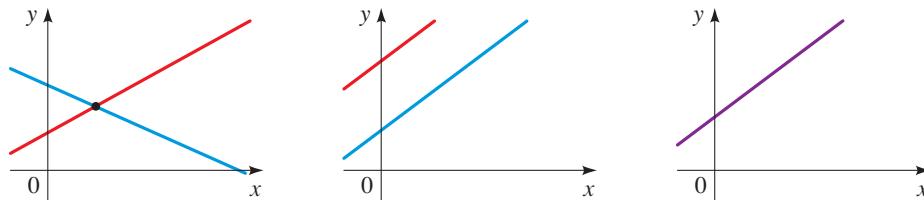
donde hemos redondeado los coeficientes a dos decimales. La Figura 4 muestra que las dos rectas se cruzan; en un acercamiento vemos que la solución es aproximadamente  $(0.30, 1.3)$ .**AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 13 Y 49****▼ El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas**

La gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que, para resolver gráficamente el sistema, debemos hallar el (los) punto(s) de intersección de las rectas. Dos rectas pueden cruzarse en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se ve en la Figura 5. Por lo tanto, hay tres posibles resultados para resolver el sistema.

**NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS**

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera. (Vea Figura 5.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema con un infinito de soluciones se llama **consistente indeterminado**.

(a) Las rectas se cruzan en un solo punto. **El sistema tiene una solución.**

**FIGURA 5**

(b) Las rectas son paralelas y no se cruzan. **El sistema no tiene solución.**

(c) Las rectas coinciden; las ecuaciones son para la misma recta. **El sistema tiene un infinito de soluciones.**

**EJEMPLO 4** | Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

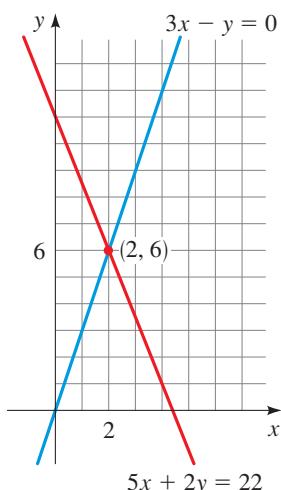


FIGURA 6

## VERIFIQUE SU RESPUESTA

$$x = 2, \quad y = 6:$$

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \quad \checkmark$$

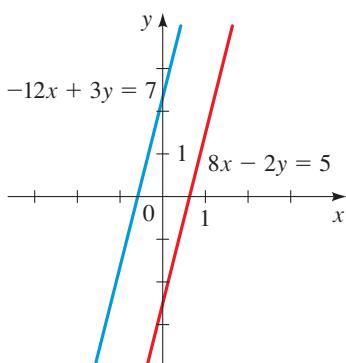


FIGURA 7

**SOLUCIÓN** Eliminamos  $y$  de las ecuaciones y despejamos  $x$ .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x - 2y = 0 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} \\ \hline 11x = 22 & \text{Sume} \\ x = 2 & \text{Despeje } x \end{array}$$

Ahora sustituimos de nuevo en la primera ecuación y despejamos  $y$ :

$$\begin{array}{ll} 6(2) - 2y = 0 & \text{Sustituimos de nuevo } x = 2 \\ -2y = -12 & \text{Restamos } 6 \times 2 = 12 \\ y = 6 & \text{Despejamos } y \end{array}$$

La solución del sistema es el par ordenado  $(2, 6)$ , es decir,

$$x = 2, \quad y = 6$$

La gráfica de la Figura 6 muestra que las rectas del sistema se cruzan en el punto  $(2, 6)$ .

**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23**

**EJEMPLO 5** | Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -12x + 3y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Esta vez tratamos de hallar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la variable  $y$ . La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 24x - 6y = 15 & 3 \times \text{Ecuación 1} \\ -24x + 6y = 14 & 2 \times \text{Ecuación 2} \end{cases} \\ \hline 0 = 29 & \text{Sume} \end{array}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina tanto  $x$  como  $y$  en este caso, y terminamos con  $0 = 29$ , que es obviamente falso. No importa qué valores asignemos a  $x$  y a  $y$ , no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La Figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

**AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35**

**EJEMPLO 6** | Un sistema lineal con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar  $x$ . Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & 4 \times \text{Ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & 3 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta dan

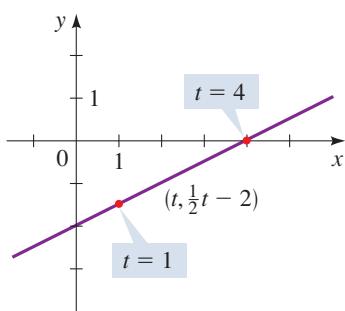


FIGURA 8

una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección, tenemos  $y = \frac{1}{2}x - 2$ . Por lo tanto, si con  $t$  representamos cualquier número real, podemos escribir la solución como

$$x = t$$

$$y = \frac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$(t, \frac{1}{2}t - 2)$$

donde  $t$  es cualquier número real. El sistema tiene un infinito de soluciones (vea Figura 8).

### AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 37

En el Ejemplo 3, para obtener soluciones específicas tenemos que asignar valores a  $t$ . Por ejemplo, si  $t = 1$ , obtenemos la solución  $(1, -\frac{3}{2})$ . si  $t = 4$ , obtenemos la solución  $(4, 0)$ . Para todo valor de  $t$  obtenemos una solución diferente. (Vea Figura 8.)

## Modelado con sistemas lineales

Con frecuencia, cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en las ciencias o en otros campos de actividad, obtenemos sistemas como el que acabamos de considerar. Cuando modelamos con sistemas de ecuaciones, usamos las siguientes guías, que son semejantes a las de la Sección 1.6.

### GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

- Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide hallar. Éstas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las variables (llámelas  $x$  y  $y$  o con alguna otra letra).
- Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables.** Lea otra vez el problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las variables que haya definido en el Paso 1.
- Establezca un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos cruciales del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el Paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
- Resuelva el sistema e interprete los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el Paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar con sistemas de ecuaciones.

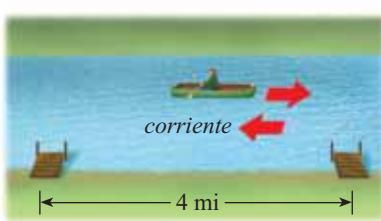
### EJEMPLO 7 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Una mujer rema un bote aguas arriba desde un punto en un río, a otro punto a 4 millas de distancia, en  $1\frac{1}{2}$  horas. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma sólo 45 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que rema con respecto al agua, y con qué velocidad se mueve la corriente?

**SOLUCIÓN** **Identificar las variables.** Nos piden hallar la velocidad con la que rema la mujer y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

$$x = \text{velocidad de remar (mi/h)}$$

$$y = \text{velocidad de la corriente (mi/h)}$$



**Expresar cantidades desconocidas en términos de la variable.** La velocidad de la mujer cuando rema aguas arriba es su velocidad para remar menos la velocidad de la corriente; su velocidad aguas abajo es su velocidad para remar más la velocidad de la corriente. Ahora convertimos esta información al lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Velocidad de remo	$x$
Velocidad de la corriente	$y$
Velocidad aguas arriba	$x - y$
Velocidad aguas abajo	$x + y$

**Establecer un sistema de ecuaciones.** La distancia aguas arriba y aguas abajo es 4 millas, de modo que usando el hecho de que velocidad  $\times$  tiempo = distancia para los dos tramos del viaje, tenemos

$$\text{velocidad aguas arriba} \times \text{tiempo aguas arriba} = \text{distancia recorrida}$$

$$\text{velocidad aguas abajo} \times \text{tiempo aguas abajo} = \text{distancia recorrida}$$

En notación algebraica esto se convierte en las ecuaciones siguientes:

$$(x - y)\frac{3}{2} = 4 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$(x + y)\frac{3}{4} = 4 \quad \text{Ecuación 2}$$

(Los tiempos se han convertido a horas, porque estamos expresando la rapidez en millas por hora.)

**Resolver el sistema.** Multiplicamos las ecuaciones por 2 y 4, respectivamente, para despejar los denominadores.

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 3x - 3y = 8 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 3x + 3y = 16 & 4 \times \text{Ecuación 2} \end{cases} \\ \hline 6x & = 24 & \text{Sume} \\ x & = 4 & \text{Despeje } x \end{array}$$

Sustituyendo este valor de  $x$  en la primera ecuación (también funciona la segunda) y despejando  $y$ , tendremos

$$3(4) - 3y = 8 \quad \text{Sustituya } x = 4$$

$$-3y = 8 - 12 \quad \text{Reste 12}$$

$$y = \frac{4}{3} \quad \text{Despeje } y$$

La mujer rema a 4 mi/h, y la corriente se mueve a  $1\frac{1}{3}$  mi/h.

#### VERIFIQUE SU RESPUESTA

**Velocidad contra la corriente es**

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{1\frac{1}{2} \text{ h}} = 2\frac{2}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo - flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} - \frac{4}{3} \text{ mi/h} = 2\frac{2}{3} \text{ mi/h}$$

**Velocidad rio abajo es**

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{\frac{3}{4} \text{ h}} = 5\frac{1}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo + flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} + \frac{4}{3} \text{ mi/h} = 5\frac{1}{3} \text{ mi/h}$$



**EJEMPLO 8** | Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol al agregarle una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante tiene un contenido alcohólico del 16% y llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y la solución de alcohol usa el vinatero?

**SOLUCIÓN** Identificar las variables. Como nos piden las cantidades de vino y alcohol, hacemos

$$x = \text{cantidad de vino utilizado (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol utilizada (L)}$$

Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de la variable. Del hecho que el vino contiene 10% de alcohol y la solución contiene 70% de alcohol, obtenemos lo siguiente.

En palabras	En álgebra
Cantidad de vino utilizada (L)	$x$
Cantidad de solución de alcohol utilizada (L)	$y$
Cantidad de alcohol en vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

Establecer un sistema de ecuaciones. El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero mezcla, y

$$x + y = 1000$$

También, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol aportado por el vino y por la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \quad \text{Simplifique}$$

$$x + 7y = 1600 \quad \text{Multiplique por 10 para quitar decimales}$$

En consecuencia, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Resolver el sistema. Restando la primera ecuación de la segunda se elimina la variable  $x$  y obtenemos

$$6y = 600 \quad \text{Rreste la Ecuación 1 de la Ecuación 2}$$

$$y = 100 \quad \text{Despeje } y$$

Ahora sustituimos  $y = 100$  en la primera ecuación y despejamos  $x$ .

$$x + 100 = 1000 \quad \text{Sustituimos } y = 100$$

$$x = 900 \quad \text{Despejamos } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 65**



## 10.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

#### 1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_. Para determinar si  $(5, -1)$  es una solución de este sistema, verificamos si  $x = 5$  y  $y = -1$  satisfacen cada \_\_\_\_\_ del sistema. ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de este sistema?

$$(5, -1), (-1, 3), (2, 1)$$

- Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por el método de \_\_\_\_\_, el método de \_\_\_\_\_ o el método \_\_\_\_\_.
- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, \_\_\_\_\_ solución o \_\_\_\_\_ soluciones.
- El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

La gráfica de la primera ecuación es la misma que la gráfica de la segunda ecuación, de manera que el sistema tiene \_\_\_\_\_ soluciones. Expresamos estas soluciones escribiendo

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \text{_____} \end{aligned}$$

donde  $t$  es cualquier número real. Algunas de las soluciones de este sistema son  $(1, \underline{\hspace{1cm}})$ ,  $(-3, \underline{\hspace{1cm}})$  y  $(5, \underline{\hspace{1cm}})$ .

### HABILIDADES

#### 5-8 ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

$$5. \begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

#### 9-12 ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

$$9. \begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

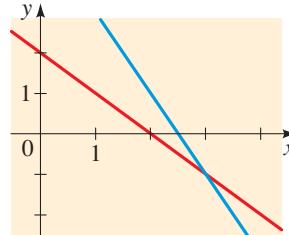
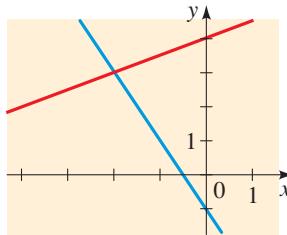
$$10. \begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x + 4y = 12 \end{cases}$$

#### 13-14 ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

$$13. \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$



#### 15-20 ■ Grafique cada uno de los sistemas lineales siguientes, ya sea manualmente o con calculadora graficadora. Use la gráfica para determinar si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene un infinito de soluciones. Si hay exactamente una solución, use la gráfica para hallarla.

$$15. \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$$

#### 21-48 ■ Resuelva el sistema, o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene un infinito de soluciones, expréselas en la forma de par ordenado dado en el Ejemplo 6.

$$21. \begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$$

39. 
$$\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$$

41. 
$$\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$$

43. 
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$$

45. 
$$\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$$

47. 
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$$

40. 
$$\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$$

42. 
$$\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$$

44. 
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

46. 
$$\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$$

48. 
$$\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$$



49-52 ■ Use calculadora graficadora para graficar ambas rectas en el mismo rectángulo de vista. (Observe que debe despejar  $y$  en términos de  $x$  antes de graficar si usa calculadora graficadora.) Resuelva el sistema redondeado a dos lugares decimales, ya sea con acercamiento y usando **TRACE** o usando la función **Intersect**.

49. 
$$\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$$

50. 
$$\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$$

51. 
$$\begin{cases} 2371x - 6552y = 13,591 \\ 9815x + 992y = 618,555 \end{cases}$$

52. 
$$\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$$

53-56 ■ Encuentre  $x$  y  $y$  en términos de  $a$  y  $b$ .

53. 
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$$

54. 
$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$$

55. 
$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$$

56. 
$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$$

## APLICACIONES

57. **Problema de números** Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.

58. **Problema de números** La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.

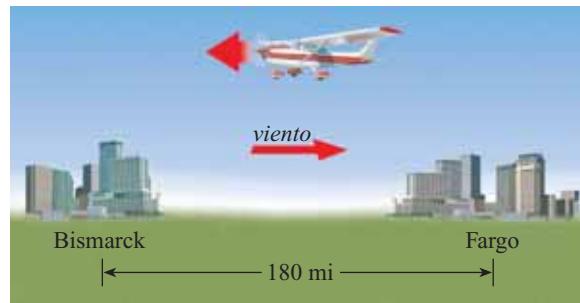
59. **Valor de monedas** Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 o de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es \$2.75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

60. **Precio de entrada** El precio de entrada a un parque de diversiones es \$1.50 para niños y \$4.00 para adultos. En cierto

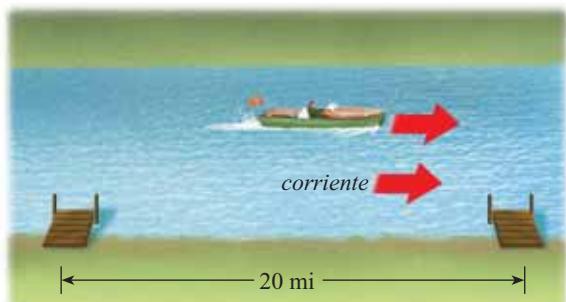
día, 2200 personas entraron al parque, y los precios de entrada recolectados sumaron \$5050. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron?

61. **Gasolinera** Una gasolinera vende gasolina regular en \$2.20 el galón y gasolina Premium en \$3.00 el galón. Al final del día se vendieron 280 galones de gasolina y los recibos totalizaron \$680. ¿Cuántos galones de cada tipo se vendieron?
62. **Puesto de frutas** Un puesto de frutas vende dos variedades de fresas: estándar y de lujo. Una caja de fresas estándar se vende en \$7 y una de lujo se vende en \$10. En un día, el puesto vende 135 cajas de fresas en un total de \$1100. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

63. **Velocidad de un avión** Un hombre vuela en un pequeño avión de Fargo a Bismarck, Dakota del Norte, una distancia de 180 millas. Debido a que hizo el vuelo con un viento de frente, el viaje le lleva 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía está soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje le lleva sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del piloto con viento en calma, y con qué velocidad sopla el viento?



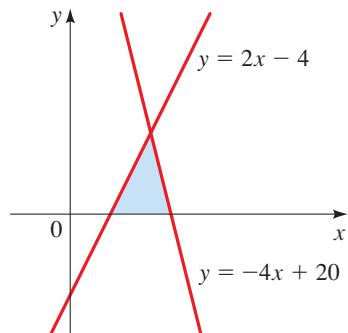
64. **Velocidad de un bote** Un bote en un río navega aguas abajo entre dos puntos, a 20 millas de distancia, en una hora. El viaje de regreso contra la corriente toma  $2\frac{1}{2}$  horas. ¿Cuál es la velocidad del bote, y con qué velocidad se mueven las aguas del río?



65. **Nutrición** Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis donde intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22,000 unidades de retinol. Ella usa dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo; el alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento les da ella al grupo de ratas diariamente?

- 66. Mezclas de café** Un cliente en una cafetería compra una mezcla de dos clases de café: Kenia, que cuesta \$3.50 la libra, y Sri Lanka, que cuesta \$5.60 la libra. Él compra 3 libras de la mezcla, que le cuestan \$11.55. ¿Cuántas libras de cada clase entraron en la mezcla?
- 67. Problema de mezclas** Un químico tiene dos grandes contenedores de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. La mezcla de 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda le da una mezcla que es 15% ácida, mientras que si mezcla 100 mL de la primera y 500 mL de la segunda le da una mezcla  $12\frac{1}{2}\%$  ácida. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?
- 68. Problema de mezclas** Una bióloga tiene dos soluciones de salmuera, una contiene 5% de sal y otra contiene 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe ella mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal?
- 69. Inversiones** Una mujer invierte un total de \$20,000 en dos cuentas, una paga 5% y la otra paga 8% de interés simple al año. El interés anual que ella percibe es \$1180. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?
- 70. Inversiones** Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una paga 6% y la otra paga 10% de interés simple al año. Él pone el doble en la cuenta que rinde menos porque es de menos riesgo. El interés que él percibe es \$3520. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?
- 71. Distancia, velocidad y tiempo** Juan y María salen de su casa al mismo tiempo y en auto se dirigen en direcciones opuestas. Juan maneja a 60 mi/h y viaja 35 millas más que María, quien maneja a 40 mi/h. El viaje de María toma 15 minutos más que a Juan. ¿Durante cuánto tiempo manejan ellos?
- 72. Ejercicio aeróbico** Una mujer se mantiene en forma haciendo ejercicio en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes ella pasa  $1\frac{1}{2}$  horas en cada una de esas actividades, cubriendo un total de  $12\frac{1}{2}$  millas. El martes corre durante 12 minutos y anda en bicicleta 45 minutos, cubriendo un total de 16 millas. Suponiendo que su velocidad para correr y andar en bicicleta no cambian de un día a otro, encuentre esas velocidades.
- 73. Problema de números** La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Encuentre el número.

- 74. Área de un triángulo** Encuentre el área del triángulo que se encuentra en el primer cuadrante (con la base sobre el eje  $x$ ) y que está limitado por las rectas  $y = 2x - 4$  y  $y = -4x + 20$ .



### DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

- 75. La recta de mínimos cuadrados** La recta de *mínimos cuadrados* o recta de *regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Estudiamos esta recta en el *Enfoque sobre modelado* que sigue al Capítulo 1 (vea página 130.) Mediante cálculo, se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los  $n$  puntos de datos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  es la recta  $y = ax + b$ , donde los coeficientes  $a$  y  $b$  satisfacen el siguiente par de ecuaciones lineales. (La notación  $\sum_{k=1}^n x_k$  representa la suma de todas las  $x$ . En la Sección 12.1 vea una descripción completa de la notación  $(\Sigma)$ .)

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) a + nb &= \sum_{k=1}^n y_k \\ \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) a + \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) b &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}$$

Use estas ecuaciones para hallar la recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de datos.

$$(1, 3), (2, 5), (3, 6), (5, 6), (7, 9)$$

Trace los puntos y su recta para confirmar que la recta se ajusta bien a estos puntos. Si su calculadora calcula regresión lineal, vea si le da la misma recta que las fórmulas.

## 10.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS INCÓGNITAS

- | Solución de un sistema lineal ► El número de soluciones de un sistema lineal  
 ► Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Una **ecuación lineal con  $n$  incógnitas** es una ecuación que se puede poner en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $c$  son números reales, y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las incógnitas. Si sólo tenemos tres o cuatro incógnitas, en general usamos  $x, y, z$  y  $w$  en lugar de  $x_1, x_2, x_3$ , y  $x_4$ . Tales ecuaciones se llaman *lineales* porque si tenemos sólo dos incógnitas, la ecuación es  $a_1x + a_2y = c$ , que es la ecuación de una recta. A continuación veamos algunos ejemplos de ecuaciones con tres incógnitas que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.